Révision du 8 juin 2017

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2 juin 2017

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.
À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.
D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année 2014 + n respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note $\mathbf{U}_n$ la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a donc $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n\mathbf{M}$ où $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.
3) En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1) Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.
   a) Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?
   b) L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?

2) On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

   a) Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4-c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

   b) Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

   c) En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

EXERCICE 2

Liban 5 juin 2017

Un numéro de carte bancaire est de la forme : $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$.
où $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{15}$ et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

```
Entrées et initialisation
    I prend la valeur 0
    P prend la valeur 0
    R prend la valeur 0
Traitement
    pour k allant de 0 à 7 faire
        R prend la valeur du reste de la division euclidienne de 2a_{2k+1} par 9
        I prend la valeur I + R
    fin
    pour k allant de 1 à 7 faire
        P prend la valeur P + a_{2k}
    fin
    S prend la valeur I + P + c
Sortie
    si S est un multiple de 10 alors
        Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
    sinon
        Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
    fin
```

1) On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

   a) Compléter le tableau ci-dessous permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

   b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.

   Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu

   $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?

2) On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.

   Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3) Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4) On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.

   On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.

   Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?