

Exo sur les similitudes

Exercice 1 :

Écriture complexe

Dans les exercices suivants donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω d'afixe ω , de rapport k et d'angle θ .

- 1) $\omega = 1 + i$; $k = 2$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- 2) $\omega = 0$; $k = \sqrt{3}$; $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- 3) $\omega = 1 - 2i$; $k = 2\sqrt{2}$; $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 :

Caractérisation d'une transformation

Dans les exercices suivants, étudier la transformation géométrique et préciser les éléments géométriques qui la caractérise :

- 1) $z' = z + 2 + i$
- 2) $z' = -z + 2i$
- 3) $z' = 3z - 2$
- 4) $z' = \frac{1}{i}z$
- 5) $z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z$
- 6) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$
- 7) $z' = 2z + 1 - i$
- 8) $z' - i = (\sqrt{3} + i)(z - i)$
- 9) $z' = -2iz + 5$
- 10) $z' = (3 + 4i)z - 4 - 8i$

Exercice 3 :

Caractéristiques d'une similitude directe

Quelles sont les caractéristiques de la similitude suivante, d'écriture complexe :

$$z' = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}z + i$$

Exercice 4 :

Discussion suivant la valeur d'un paramètre

Soit u un nombre complexe et f la transformation d'écriture complexe :

$$z' = u^2z + u - 1$$

- 1) Pour quelles valeurs de u , f est-elle une translation ?

Dans la suite, on suppose $u^2 \neq 1$

- 2) Montrer que le point Ω d'affixe $\omega = \frac{-1}{1+u}$ est l'unique point fixe de f .
- 3) Déterminer les valeur de u pour lesquelles f est une symétrie centrale et représenter graphiquement les centre de ces symétries.
- 4) Déterminer les valeur de u pour lesquelles f est un quart de tour direct et représenter graphiquement les centre de ces quarts de tour.
- 5) Caractériser f lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 5 :

Propriété géométrique

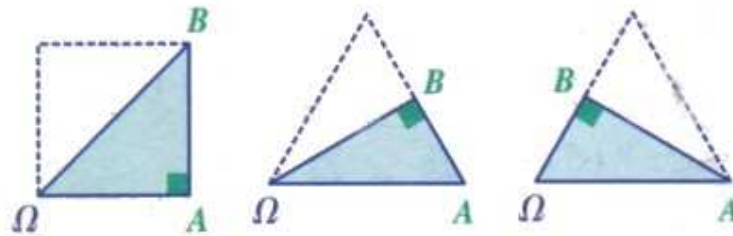
Placer deux points distincts O et A et construire à la règle et au compas l'image de A par chacune des similitudes suivantes, toutes centrée en O .

- 1) angle $\frac{3\pi}{4}$ et rapport $\sqrt{2}$.
- 2) angle $-\frac{\pi}{6}$ et rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 3) angle $\frac{2\pi}{3}$ et rapport $\frac{1}{2}$.
- 4) angle $-\frac{\pi}{2}$ et rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6 :

Configurations usuelles

Donner l'angle, le rapport et l'écriture complexe de chacune des similitudes directes de centre Ω qui transforme A en B puis B en A .

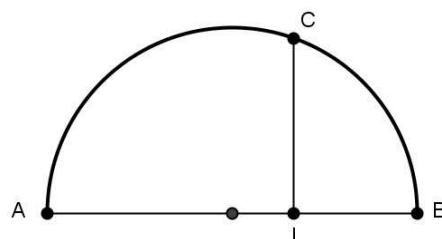


Exercice 7 :

Moyenne géométrique

Prouver que la similitude directe de centre I qui transforme B en C transforme C en A .

Retrouver (?) ainsi que IC est la moyenne géométrique de IA et IB , c'est à dire que $IC = \sqrt{IA \times IB}$

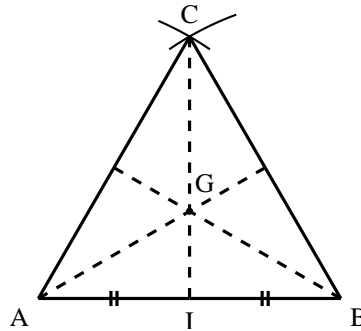


Exercice 8 :

ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G. I est le milieu de [AB].

Pour chacune des similitudes directes suivantes préciser son rapport et son angle.

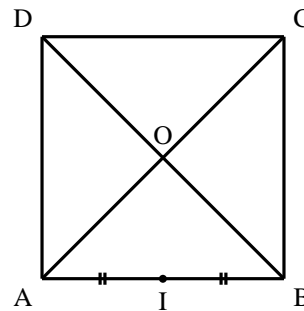
- s_1 a pour centre B et $s_1(I) = C$.
- s_2 a pour centre I et $s_2(A) = C$.
- s_3 a pour centre A et $s_3(G) = C$.

**Exercice 9 :**

ABCD est un carré direct.

O est le centre de ABCD et I le milieu de [AB]. Pour chacune des similitudes directes suivantes, préciser son rapport et son angle.

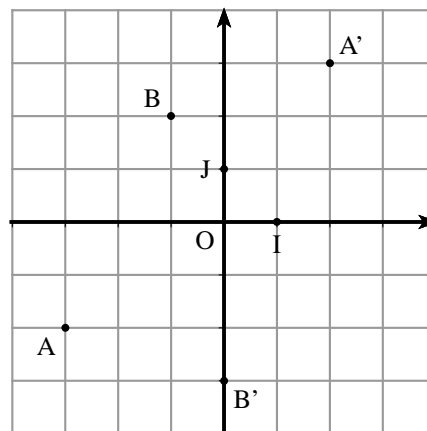
- s_1 a pour centre C et $s_1(A) = B$.
- s_2 a pour centre O et $s_2(I) = C$.

**Exercice 10 :**

On considère la figure ci-dessous où A' et B' sont les images de A et B par une similitude directe s :

$$A' = s(A) \quad \text{et} \quad B' = s(B)$$

- Quel est le rapport de s ?
- Construire le point K tel que : $I = s(K)$
- Construire l'image par s du cercle de centre A passant par O
- On pose : $O' = s(O)$. Le triangle $O'A'B'$ est-il rectangle ?
- L'image par s de la médiatrice de [AB] est-elle parallèle à (AB') ?
- Soit C le point de coordonnée $(0; -1)$ et C' son image par s . Montrer que le triangle $A'B'C'$ est isocèle rectangle en C' et calculer son aire



Exercice 11 :**Similitude et géométrie**

Soit s la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

- 1) Préciser son rapport, son angle et l'affixe de son centre Ω .
- 2) Montrer que, pour tout point M , distinct de Ω , d'image M' par s , le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M' .

Exercice 12 :**Similitude directe**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; u; v)$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} - i, \quad z_B = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_C = \sqrt{3} + i, \quad z_D = -1 + i\sqrt{3}$$

- 1) a) Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .
- b) Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
- c) Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$.
- d) Calculer le quotient : $\frac{z_B}{z_A}$.
En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
- 2) On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est : $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$
 - a) Déterminer les éléments caractéristiques de g .
 - b) Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O .
 - c) Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

Exercice 13 :**Amérique du nord 2003**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives

$$z_0 = 5 - 4i, \quad z_1 = -1 - 4i, \quad z_2 = -4 - i$$

- 1) a) Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.
- b) Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.
- c) En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S .
- d) On considère un point M , d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M' , d'affixe z' .
Vérifier la relation : $\omega - z' = i(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

- 2) Pour tout entier naturel n , le point A_{n+1} , est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose :
- $$u_n = A_n A_{n+1}.$$
- a) Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6 .
- b) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
- 3) La suite (v_n) est définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- a) Exprimer v_n en fonction de n .
- b) La suite (v_n) est-elle convergente ?
- 4) a) Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
- b) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n :
si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

Exercice 14 :**La Réunion juin 2006**

On complètera la figure donnée ci-dessous au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s . Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

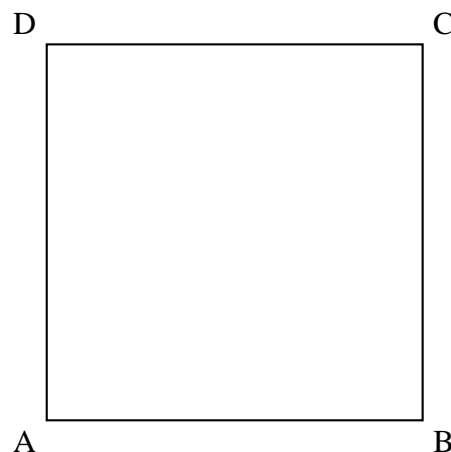
Partie A

- 1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .
- 2) On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 . Placer Ω sur la figure.
- 3) Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
- 4) On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle-même).
 - a) Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
 - b) Trouver l'image du point A par h . En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2 + 2i$ et $2i$.

- 1) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.
- 2) Calculer l'affixe du point Ω .
- 3) Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.



Exercice 15 :**Amérique du Sud nov 2005**

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = i, \quad b = 1 + 2i, \quad c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \text{et} \quad d = 3 + 2i.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M' , d'affixe z' , son image par s .

1) Exprimer z' en fonction de z .

Déterminer les éléments caractéristiques de s .

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 &= 0 \\ U_{n+1} &= 2U_n + 1 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2) Montrer que, pour tout entier naturel n , U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3) Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s , les termes de la suite (U_n) .

4) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n = 2^n - 1$.

5) Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$,

$$U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}.$$

La notation $\text{pgcd}(a; b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b . Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6) Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n; p)}.$$

Déterminer le nombre : $\text{pgcd}(U_{2005}, U_{15})$.