Contrôle de mathématiques

Lundi 31 janvier 2011

Exercice 1

Question de cours. (4 points)

1) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
2) Enoncer le critère d'arrêt des nombres premiers.
   Application : 401 est-il premier ? Résoudre alors dans $\mathbb{N}$ l'équation :
$$x^2 - y^2 = 401$$
3) Quel est le nombre de diviseurs de 13 230.

Exercice 2

Divisibilité (4 points)

1) Montrer que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est pair.
2) Montrer que $2^{36} - 1$ et $3^{36} - 1$ sont divisible par 37. On citera le théorème utilisé.
3) En déduire alors que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 74.

Exercice 3

Trouver un nombre premier quad (3 points)

On considère un carré de la forme $17p + 1$ où p est premier.

1) Ecrire $17p$ comme le produit de deux facteurs.
2) En déduire p. On citera le théorème utilisé.

Exercice 4

Nombre de diviseurs (3 points)

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n

1) Montrer que l'on a : $\beta(\alpha - 1) = 4$
2) En déduire n.

Exercice 5

Polynésie sept 2003 (6 points)

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1) Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.
3) En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4) a) Soient a, b et c trois entiers naturels.
   Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

   b) Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5) Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?