Contrôle de mathématiques

Lundi 31 janvier 2011 correction

Exercice 1

Question de cours. (4 points)

1) Cf cours
2) Tout nombre entier n non premier supérieur à 2 possède un diviseur premier p tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$.

   Application : on a $20 < \sqrt{401} < 21$. On teste tous les nombres premiers inférieurs à 21 soit : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

   D'après les critères de divisibilité, 401 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 11. On teste alors les autres :

$$\begin{aligned} 401 &= 7 \times 57 + 2 \\ 401 &= 13 \times 30 + 11 \\ 401 &= 17 \times 23 + 10 \\ 401 &= 19 \times 21 + 2 \end{aligned}$$

   donc 401 est premier.

   On peut alors résoudre l'équation :

$$x^2 - y^2 = 401 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) = 401$$

   $(x-y)$ et $(x+y)$ sont donc des diviseurs de 401. Comme x et y sont des entiers naturels alors $x - y \leqslant x + y$. On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 401 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 201 \\ y = 200 \end{cases}$$

3) On décompose : $13\,230 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$

   il y a donc : $(1+1)(3+1)(1+1)(2+1) = 48$ diviseurs.

Exercice 2

Divisibilité (4 points)

1) Un nombre a et sa puissance non nul a^n sont de même parité. Donc 2^{37} et 3^{37} sont respectivement pair et impair.

   La différence de deux entiers de même parité est paire. Donc $3^{37} - 5$ est pair.

   $2^{37} + 3^{37} - 5$ est donc pair.

2) Théorème de Fermat : soit p premier et a non divisible par p alors on a :

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod 37.$$

2 et 3 ne sont pas divisible par 37, donc on a :

$$2^{36} \equiv 1 \mod 37 \quad \text{et} \quad 3^{36} \equiv 1 \mod 37.$$

Donc $2^{36} - 1$ et $3^{36} - 1$ sont divisible par 37.

3) $2^{36} \equiv 1 \mod 37$ et $3^{36} \equiv 1 \mod 37$ alors $2^{37} \equiv 2 \mod 37$ et $3^{37} \equiv 3 \mod 37$.

Par la compatibilité avec la congruence on a : $2^{37} + 3^{37} - 5 \equiv 2 + 3 - 5 \mod 37$ donc $2^{37} + 3^{37} - 5 \equiv 0 \mod 37$.

donc $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 37, comme $2^{37} + 3^{37} - 5$ est pair et comme 2 et 37 sont premiers entre eux alors $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par $2 \times 37 = 74$.

Exercice 3

Trouver un nombre premier quad (3 points)

On considère un carré de la forme $17p + 1$ où p est premier.

1) On a : $17p + 1 = a^2$ soit $17p = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

2) Théorème de Bezout : p premier divise le produit ab si et seulement si p divise a ou p divise b.

On en déduit que 17 divise alors $a - 1$ ou $a + 1$.

Si 17 divise $a - 1$ alors $a - 1 = 17k$ et donc $p = k(a + 1)$. Comme p est premier alors $k = 1$. On en déduit :

$$a - 1 = 17 \quad \text{donc} \quad a = 18 \quad \text{donc} \quad p = a + 1 = 19$$

De même si 17 divise $a + 1$ alors $a + 1 = 17k$ et donc $p = k(a - 1)$. Comme p est premier alors $k = 1$. On en déduit :

$$a + 1 = 17 \quad \text{donc} \quad a = 16 \quad \text{donc} \quad p = a - 1 = 15 \quad \text{non premier}$$

Conclusion : $p = 19$

Exercice 4

Nombre de diviseurs (3 points)

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n

1) On a : $12n = 2^2 \times 3 \times 2^\alpha 3^\beta = 2^{\alpha+2}3^{\beta+1}$. On doit donc avoir :

$$\begin{aligned}
(\alpha + 2 + 1)(\beta + 1 + 1) &= 2(\alpha + 1)(\beta + 1) \\
\alpha\beta + 2\alpha + 3\beta + 6 &= 2\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 2 \\
\alpha\beta - \beta &= 6 - 2 \\
\beta(\alpha - 1) &= 4
\end{aligned}$$

2) Les deux décomposition de 4 sont : 1×4 et 2×2. On a donc les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 \\ \alpha = 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

On obtient les solution suivante : $n = 2^5 3^1 = 96$, $n = 2^2 3^4 = 324$, et $n = 2^3 3^2 = 72$.

Exercice 5

Polynésie sept 2003 (6 points)

1) Si $p \geqslant 7$ et p premier, alors p n'est pas divisible par 3. On en déduit que :

$$p \equiv 1 \mod 3 \quad \text{ou} \quad p \equiv 2 \mod 3 \Leftrightarrow p \equiv -1 \mod 3$$

On en déduit alors que $p^4 \equiv 1 \mod 3$ et donc $p^4 - 1 \equiv 0 \mod 3$.

n est donc divisible par 3.

2) p est impair donc il existe un entier k tel que : $p = 2k + 1$. On a donc :

$$p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1)$$

Donc $n = p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 4k(k+1)(p^2+1)$

k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair. De plus comme p est impair, $p^2 + 1$ est pair (un nombre et son carré ont même parité).

Conclusion n est divisible par 16.

3) Comme $p \geqslant 7$ et p premier, p n'est pas divisible par 5. On a donc les cas suivants :

$$p \equiv 1 \mod 5 \quad \text{donc} \quad p^4 - 1 \equiv 1 - 1 \mod 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0 \mod 5$$

$$p \equiv 2 \mod 5 \quad \text{donc} \quad p^4 - 1 \equiv 16 - 1 \equiv 15 \mod 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0 \mod 5$$

$$p \equiv 3 \mod 5 \quad \text{donc} \quad p^4 - 1 \equiv 81 - 1 \equiv 80 \mod 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0 \mod 5$$

$$p \equiv 4 \mod 5 \quad \text{donc} \quad p^4 - 1 \equiv 256 - 1 \equiv 255 \mod 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0 \mod 5$$

Donc n est divisible par 5.

Autre méthode mais non demandée : 5 premier et p est non multiple de 5, d'après le théorème de Fermat : $p^4 \equiv 1 \mod 5$

4) a) Si a et b divise c, alors il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que : $c = k_1 a$ et $c = k_2 b$.

On a donc $k_1 a = k_2 b$, donc a divise $k_2 b$ et comme a et b sont premier entre eux, d'après le théorème de Gauss, a divise k_2. Il existe alors k_3 tel que $k_2 = k_3 a$.

On a donc $c = k_2 b = k_3 ab$. ab divise c.

b) 3, 16 et 5 divise n et 3, 16 et 5 sont premiers entre eux, donc $3 \times 16 \times 5 = 240$ divise n.

5) D'après ce qui précède $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ $\quad p_i^4 \equiv 1 \mod 5$. On en déduit que :

$$A \equiv 15 \mod 5 \quad \Leftrightarrow \quad A \equiv 0 \mod 5$$

Donc A est toujours divisible par 5. Il n'existe pas de tels nombres.