# Correction contrôle de mathématiques
## du mardi 24 janvier 2012.

## Exercice 1

**Question de cours. (4 points)**

1) Tout entier naturel $n$, $n \geqslant 2$, admet un diviseur premier.
Si $n$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier $p$ tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$
Application : $\sqrt{271} \simeq 16,46$. On teste donc tous les nombres premiers jusqu'à 16 c'est à dire : 2, 3, 5, 7, 11, 13.
271 n'est divisible par aucun de ces nombres. 271 est donc un nombre premier.

2) La décomposition de 960 est : $960 = 2^6 \times 3 \times 5$
Soit un nombre $n$ ($n \geqslant 2$) dont la décomposition en facteurs premiers est : $n = p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times \cdots \times p_m^{\alpha m}$, Le nombre de diviseurs $N$ est alors : $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$.
Pour 960 : $N = (6 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 28$. 960 a donc 28 diviseurs.

3) Si le nombre de diviseurs est impair, tous les facteurs de $N$ sont impairs, c'est à dire :
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \alpha_i + 1 \text{ est impair} \quad \text{donc} \quad \alpha_i \text{ est pair}$$
Tous les exposants dans la décomposition sont pairs, le nombre est donc un carré.

## Exercice 2

**« Les zéro de 1000 ! » (4,5 points)**

1) 1000! est divisible par 2 et par 5, donc sa décomposition en nombres premiers est de la forme : $2^p \times 5^q \times N$, avec $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$. $N$ est alors le produit de nombres premiers différents de 2 et de 5. $N$ est donc premier avec 2 et 5. Il est donc premier avec 10.

2) a) Il y a $\dfrac{1000}{5} = 200$ nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5.
b) Il y a $\dfrac{200}{5} = 40$ nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par $5^2$.
c) Il y a $\dfrac{40}{5} = 8$ nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par $5^3$.
d) Il y a 1 nombre inférieur ou égal à 1000 divisible par $5^4$ : $625 = 5^4$.
e) Comme 1000! contient tous ces facteurs, 1000! contient : $5^{200} \times 5^{40} \times 5^8 \times 5 = 5^{249}$.
On a donc : $q = 249$

3) 1000! contient au moins : $\dfrac{1000}{2} = 500$ facteurs de 2 donc $p \geqslant 500$ et donc $p > q$.
On a alors $1000! = (2 \times 5)^{249} \times 2^{p-249} \times N = 10^{249} \times M$ où $M$ n'est pas divisible par 5, donc non divisible par 10. 1000! possède donc 249 zéros.

## Exercice 3

**Trouver un nombre premier (3 points)**

1) On a : $17p + 1 = n^2$ soit $17p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$

2) Théorème de Bezout : $p$ premier divise le produit $ab$ si et seulement si $p$ divise $a$ ou $p$ divise $b$.

3) Comme 17 est premier, on en déduit que 17 divise alors $n-1$ ou $n+1$.

   Si 17 divise $n-1$ alors $n-1 = 17k$ et donc $p = k(n+1)$. Comme $p$ est premier alors $k = 1$. On en déduit :

$$n - 1 = 17 \quad \text{donc} \quad n = 18 \quad \text{donc} \quad p = n + 1 = 19$$

   De même si 17 divise $n+1$ alors $n+1 = 17k$ et donc $p = k(n-1)$. Comme $p$ est premier alors $k = 1$. On en déduit :

$$n + 1 = 17 \quad \text{donc} \quad n = 16 \quad \text{donc} \quad p = n - 1 = 15 \quad \text{non premier. Impossible}$$

   Conclusion : Seul $p = 19$ convient.

# Exercice 4

**Nombre de diviseurs (3 points)**

1) On a : $12n = 2^2 \times 3 \times 2^\alpha 3^\beta = 2^{\alpha+2} 3^{\beta+1}$. On doit donc avoir :

$$\begin{aligned}(\alpha+2+1)(\beta+1+1) &= 2(\alpha+1)(\beta+1)\\ \alpha\beta + 2\alpha + 3\beta + 6 &= 2\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 2\\ \alpha\beta - \beta &= 6 - 2\\ \beta(\alpha - 1) &= 4\end{aligned}$$

2) Les deux décompositions de 4 sont : $1\times4$ et $2\times2$. On a donc les systèmes suivants :

$$\begin{cases}\beta = 1\\ \alpha - 1 = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 1\\ \alpha = 5\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\beta = 4\\ \alpha - 1 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 4\\ \alpha = 2\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\beta = 2\\ \alpha - 1 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 2\\ \alpha = 3\end{cases}$$

   On obtient les solution suivante : $n = 2^5 3^1 = 96$, $n = 2^2 3^4 = 324$, et $n = 2^3 3^2 = 72$.

# Exercice 5

**Vrai-Faux (1 points)**

**Proposition : vraie** Comme $k$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$, $k$ divise donc $n!$. On peut donc écrire $n! = kp$. On a alors :

$$n! + k = k(p+1)$$

$n! + k$ est donc le produit de deux nombres supérieurs à 1. Il n'est donc pas premier. La proposition est vraie.

# Exercice 6

**Trouver un entier (1.5 points)**

1. On a : $2008 = 2^3 \times 251$

   251 est premier car d'après le critère d'arrêt, $\sqrt{251} \simeq 15,8$, 251 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

2. On sait que $k$ et $k^6$ contiennent les mêmes facteurs premiers. Comme 2008 divise $k^6$, $k$ contient les facteurs premiers 2 et 251. Pour obtenir la plus petite valeur de $k$, nous ne retiendrons que ces facteurs. On a donc :

$$k = 2^\alpha \times 251^\beta \quad \Leftrightarrow \quad k^6 = 2^{6\alpha} \times 251^{6\beta}$$

La plus petite valeur de $k$ est donc obtenu avec : $6\alpha \geqslant 3$ et $6\beta \geqslant 1$. On obtient alors $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. On a alors : $k = 2 \times 251 = 502$.

# Exercice 7

**Égalité de Sophie Germain (3 points)**

1) On developpe la quantité :

$$\begin{aligned}(n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn) &= n^4 + 2n^2m^2 - 2n^3m + 2n^2m^2 + 4m^4 - 4nm^3 \\ &\quad + 2n^3m + 4nm^3 - 4n^2m^2 \\ &= n^4 + 4m^4\end{aligned}$$

Certains élèves m'ont proposé mieux, en considérant que les deux facteurs sont de la forme $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}(n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn) &= (n^2 + 2m^2)^2 - 4n^2m^2 \\ &= n^4 + 4n^2m^2 + 4m^4 - 4n^2m^2 \\ &= n^4 + 4m^4\end{aligned}$$

On retrouve donc l'égalité.

2) Pour $n^4 + 4$, on prend donc $m = 1$, on obtient donc :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

$n^4 + 4$ est premier si le plus petit facteur est égal à 1. On a alors :

$$n^2 - 2n + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 2n + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (n - 1)^2 = 0$$

Donc $n^4 + 4$ est premier si et seulement si $n = 1$.

3) On a : $4^{545} + 545^4 = 545^4 + 4 \times 4^{544} = 545^4 + 4(4^{136})^4$. On prend donc $m = 4^{136}$. On a alors :

$$\begin{aligned}545^4 + 4(4^{136})^4 &= \left[545^2 + 2 \times \left(4^{136}\right)^2 + 2 \times 545 \times 4^{136}\right]\left[545^2 + 2 \times \left(4^{136}\right)^2 - 2 \times 545 \times 4^{136}\right] \\ &= \left[545^2 + 2^{273}\left(4^{136} + 545\right)\right]\left[545^2 + 2^{273}\left(4^{136} - 545\right)\right]\end{aligned}$$

Les deux facteurs sont manifestement supérieurs à 1. $4^{545} + 545^4$ n'est donc pas premier.