

Contrôle de mathématiques

Mardi 11 février 2014.

EXERCICE 1

Question de cours.

(5 points)

- 1) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
- 2) a) Énoncer le critère d'arrêt pour qu'un nombre soit premier.
b) Démontrer que 419 est premier. On expliquera clairement la méthode utilisée
- 3) Décomposer 8 316 en facteurs premiers. Quel est alors le nombre de diviseurs de 8 316 ?

EXERCICE 2

Algorithme

(2 points)

On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

- 1) Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$?
- 2) Que donne cet algorithme dans le cas général ?

Variables : A et N entiers naturels

Entrées et initialisation

Saisir A
N prend la valeur 1

Traitement

tant que $N \leq \sqrt{A}$ **faire**
 si $\frac{A}{N} = \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ **alors**
 Afficher N et $\frac{A}{N}$
 fin
 N prend la valeur $N + 1$
fin

EXERCICE 3

Trouver un nombre premier

(3 points)

On considère un entier n tel que $n^2 = 29p + 1$ où p est premier.

- 1) Ecrire $29p$ comme le produit de deux facteurs en fonction de n .
- 2) Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers
- 3) En déduire n puis p .

EXERCICE 4

Bac

(10 points)

p est un nombre premier supérieur ou égal à 7. Le but de cet exercice est de montrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240 puis d'appliquer ce résultat.

- 1) Peut-on avoir $p \equiv 0 \pmod{3}$? En analysant les autres cas modulo 3, démontrer que n est divisible par 3.
- 2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que :

$$p^2 - 1 = 4k(k + 1)$$

En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 8 puis que n est divisible par 16.

- 3) En raisonnant comme à la question 1) modulo 5, démontrer que 5 divise n .
- 4) a) Que peut-on dire si a et b divise c et que $\text{pgcd}(a, b) = 1$?
 b) Déduire des questions précédentes que 240 divise n .
- 5) Existe-t-il 15 nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs à 7, tels que l'entier A ci-dessous soit un nombre premier ?

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$$