Correction contrôle de mathématiques

Mardi 04 novembre 2014

EXERCICE 1

Multiples **(4 points)**

1) $D_{700} = \{1; 2; 4; 5; 7; 10; 14; 20; 25; 28; 35; 50; 70; 100; 140; 175; 350; 700\}$

2) a) "Si a divise b et c alors a divise toute combinaison linéaire de b et de c : $\alpha b + \beta c$"

   d divise $9n + 2$ et $7n - 3$ donc d divise :

$$7(9n + 2) + (-9)(7n - 3) = 63n + 14 - 63n + 27 = 41$$

   d divise donc 41.

   b) Comme 41 est un nombre premier : $d = 1$ ou $d = 43$

3) Comme $n + 4$ divise $3n + 22$, il existe un relatif k tel que

   $3n + 22 = k(n + 4) \Leftrightarrow 3n + 12 + 10 = k(n + 4) \Leftrightarrow 3(n + 4) + 10 = k(n + 4) \Leftrightarrow (n + 4)(k - 3) = 10$

   $n + 4$ divise 10, or les diviseurs naturels de 10 sont : 1, 2, 5, 10, on a donc

$n + 4$	1	2	5	10
n	-3	-2	1	6

Comme on cherche des naturels, les solutions sont 1 et 6.

EXERCICE 2

Division euclidienne **(2 points)**

D'après l'énonce, il existe un naturel q tel que : $n = 152q + 13$ et $n = 147q + 98$

donc $152q + 13 = 147q + 98 \Leftrightarrow 5q = 85 \Leftrightarrow q = 17$

L'entier naturel n est : $n = 152 \times 17 + 13 = 2\,597$

EXERCICE 3

Congruence **(2 points)**

1) On détermine la série au bout de laquelle on retrouve un reste déjà obtenu (principe des tiroirs)

   $2^0 \equiv 1 \pmod 5$, $2^1 \equiv 2 \pmod 5$, $2^2 \equiv 4 \pmod 5$, $2^3 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$, $2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$

   La série est donc de 4 :

$n \equiv \pmod 4$	0	1	2	3
$2^n \equiv \pmod 5$	1	2	4	3

2) On a : $2012 \equiv 2 \pmod 5$ car $2012 = 5 \times 402 + 2$ donc d'après la compatibilité de la congruence $2012^{2015} \equiv 2^{2015} \pmod 5$

or $2015 \equiv 3 \pmod 4$ car $2015 = 4 \times 503 + 3$, d'après la question 1) $2^{2015} \equiv 3 \pmod 5$

Le reste de la division de 2012^{2015} par 5 est 3.

Exercice 4

ROC **(4 points)**

1) Voir le cours
2) Voir le cours
3) **Application :**
$4^2 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$ comme la congruence est compatible avec la puissance
$(4^2)^2 \equiv 5^2 \pmod{11} \Leftrightarrow 4^4 \equiv 25 \equiv 3 \pmod{11}$

$4^{4n+2} - 3^{n+3} = \left(4^4\right)^n \times 16 - 3^n \times 27$ or $16 \equiv 5 \pmod{11}$ et $27 \equiv 5 \pmod{11}$, comme la congruence est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$4^{4n+2} - 3^{n+3} \equiv 5 \times 3^n - 5 \times 3^n \equiv 0 \pmod{11}$$

$4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est donc divisible par 11 pour tout naturel n

Exercice 5

Date d'anniversaire **(5 points)**

Partie A

1) Pour le 1er août, on a $j = 1$ et $m = 8$:
$12j + 37m = 12 + 37 \times 8 = 12 + 296 = 308$

2) a) $z = 12j + 37m$. Or $12j \equiv 0 \pmod{12}$ et $37 \equiv 1 \pmod{12}$ donc d'après la compatibilité de la congruence $z \equiv m \pmod{12}$

b) On sait que $z \equiv m \pmod{12}$ et que $1 \leqslant m \leqslant 12$, donc m est le reste de la division par 12 de z si le reste est non nul.

or $455 = 12 \times 37 + 11$ donc $m = 11$. On déduit alors que $j = \dfrac{455 - 11 \times 37}{12} = 4$

La date anniversaire du spectateur est donc le 4 novembre.

Partie B

1) On obtient l'algorithme suivant :

Variables : j, m entiers
Traitement
  pour m de 1 à 12 **faire**
    pour j de 1 à 31 **faire**
      $12j + 31m \to z$
      si $z = 503$ **alors**
        Afficher j,m
      fin
    fin
  fin

2) On trouve qu'une seule solution le 29 mai.

EXERCICE 6

Pièces d'un puzzle **(3 points)**

Les différents rangement peuvent se traduire en terme de congruence par :
- si elle les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces $\Rightarrow \quad n \equiv 3 \pmod 5$
- si elle les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces $\Rightarrow \quad n \equiv 2 \pmod 7$
- si elle les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièces $\Rightarrow \quad n \equiv 1 \pmod 9$
- et si elle les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièce $\Rightarrow \quad n \equiv 0 \pmod{11}$

1) On a alors :
   - $2n - 11 \equiv 6 - 11 \equiv -5 \equiv 0 \pmod 5$
   - $2n - 11 \equiv 4 - 11 \equiv -7 \equiv 0 \pmod 7$
   - $2n - 11 \equiv 2 - 11 \equiv -9 \equiv 0 \pmod 9$
   - $2n - 11 \equiv 0 - 11 \equiv -11 \equiv 0 \pmod{11}$

   Sa mère a donc raison $2n - 11$ est divisible par 5, 7, 9, 11

2) Comme 5, 7, 9, 11 sont premiers entre eux deux à deux, $2n - 11$ est donc divisible par $5 \times 7 \times 9 \times 11 = 3\,465$, on a alors $2n - 1 = 3\,465k, \ k \in \mathbb{N}$

   si $n < 2\,000$ alors $2n - 11 < 3\,989$ donc $k = 1$

   $$2n - 11 = 3\,465 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{3\,465 + 11}{2} = 1\,738$$

   Le puzzle contient donc 1 738 pièces.