

# Contrôle de MATHÉMATIQUES

## Mardi 06 janvier 2015

### EXERCICE 1

#### ROC et questions de cours

(6 points)

- 1) a) Citer le théorème de Bézout.  
b) Montrer que quelque soit l'entier naturel  $n$ , les nombres  $a = 2n + 1$  et  $b = 9n + 4$  sont premiers entre eux.
- 2) a) Citer puis démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.  
b) Trouver tous les couples entiers naturels  $(x; y)$  tels que :  $4x = 7(y - 1)$
- 3) a) Citer le corollaire du théorème de Bézout.  
b) L'équation  $14x + 35y = 5$  admet-elle des solutions entières ?  
Même question avec  $7x - 13y = 4$  ?

### EXERCICE 2

#### Application du cours

(4 points)

- 1) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le pgcd de 1 064 et 700. En déduire le ppcm de 1 064 et 700.
- 2) On note  $n$  un naturel non nul,  $a = 3n + 1$  et  $b = 5n - 1$ .  
a) Montrer que le pgcd( $a, b$ ) est un diviseur de 8.  
b) Pour quelles valeurs de  $n$  le pgcd( $a, b$ ) est-il égal à 8 ?  
⚠ On pourra utiliser le langage des congruences.

### EXERCICE 3

#### Algorithme et équation diophantienne

(7 points)

On considère l'algorithme suivant, où  $A$  et  $B$  sont des entiers naturels tels que  $A < B$  :

**Variables** :  $A, B, D$  entiers naturels  
**Entrées et initialisation**  
 | Lire  $A$  et  $B$  tels que  $A < B$   
**Traitement**  
 | Affecter à  $D$  la valeur de  $B - A$   
**tant que**  $D > 0$  **faire**  
 |  $B$  prend la valeur de  $A$   
 |  $A$  prend la valeur de  $D$   
**si**  $B > A$  **alors**  
 |  $D$  prend la valeur de  $B - A$   
**sinon**  
 |  $D$  prend la valeur de  $A - B$   
**fin**  
**fin**  
**Sorties** : Afficher  $A$

- 1) On entre  $A = 12$  et  $B = 14$ .  
En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

- 2) Que calcule cet algorithme ?
- 3) a) Montrer que 221 et 331 sont premiers entre eux.  
 b) Justifier que l'équation (E)  $221x - 331y = 1$  admet des solutions entières.  
 c) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).  
 ⚠ On pourra éventuellement remonter l'algorithme d'Euclide.  
 d) Déterminer l'ensemble des couples  $(x ; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- 4) On considère les suites d'entiers naturels  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 331 \end{cases}$$

- a) Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?  
 En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .
- b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(p ; q)$  tels que  
 $u_p = v_q, \quad 0 \leq p \leq 500 \quad \text{et} \quad 0 \leq q \leq 500.$

## EXERCICE 4

---

### Équation

**(3 points)**

Soient  $x$  et  $y$  deux entiers naturels non nul. On pose  $m = \text{ppcm}(x, y)$  et  $d = \text{pgcd}(x, y)$

- 1) Quelle relation existe-t-il entre  $m$  et  $d$  ?
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$ ,  $m - 9d = 13$   
 ⚠ On pourra donner les solutions sous forme d'un tableau.

**Annexe** (à rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>
12	14	