Correction devoir du 07 janvier 2016

EXERCICE 1

Algorithme **(5 points)**

1) Soit $D = \text{pgcd}(a; b)$ et $d = \text{pgcd}(a - b; b)$.

- D divise a et b donc divise toute combinaison linéaire de a et de b donc $(a - b)$. D divise $(a - b)$ et b donc $D \leqslant d$ (1)
- d divise $(a - b)$ et b donc divise toute combinaison linéaire de $(a - b)$ et de b donc $(a - b) + b = a$. D divise a et b donc $d \leqslant D$ (2)
- De (1) et (2), on déduit : $D = d$

2) On trouve en réitérant le processus :

pgcd(308; 165)	pgcd(165; 143)
=	pgcd(143; 22)
=	pgcd(121; 22)
=	pgcd(99; 22)
=	pgcd(77; 22)
=	pgcd(55; 22)
=	pgcd(33; 22)
=	pgcd(22; 11)
=	pgcd(11; 11)
=	11

pgcd(1008; 308)	pgcd(700; 308)
=	pgcd(392; 308)
=	pgcd(308; 84)
=	pgcd(224; 84)
=	pgcd(140; 84)
=	pgcd(84; 56)
=	pgcd(56; 28)
=	pgcd(28; 28)
=	28

pgcd(735; 210)	pgcd(700; 308)
=	pgcd(525; 210)
=	pgcd(315; 210)
=	pgcd(210; 105)
=	pgcd(105; 105)
=	105

3) a) Voir ci-contre

b) La suite des différences $|a - b|$ est une suite strictement décroissante dans $\mathbb{N}$, elle est donc stationnaire vers 0 à partir d'un certain rang, c'est-à-dire lorsque $a = b$.

c) On vérifie aisément les réponses de la question 2).

Variables : a, b, c entiers
Entrées et initialisation
  Lire a, b
Traitement
  tant que $a \neq b$ **faire**
    Donner à c la valeur de $|a - b|$
    Donner à a la valeur de b
    Donner à b la valeur de c
  fin
Sorties : Afficher a

EXERCICE 2

Nombres premiers entre eux **(2 points)**

Soit $d = \text{pgcd}(a; b)$.
d divise a et b donc divise toute combinaison linéaire de a et de b donc :
$(-3)a + 2b = -6n + 6n + 2 = 2$.
Les valeurs de d sont donc à chercher dans l'ensemble $\{1; 2\}$

- Si $n \equiv 0\ (2)$ alors $a \equiv 0\ (2)$ et $b \equiv 1\ (2)$.
  a et b sont de parités différentes donc $d = 1$
- Si $n \equiv 1\ (2)$ alors $a \equiv 0\ (2)$ et $b \equiv 3 + 1 \equiv 0\ (2)$.
  a et b sont pairs donc $d = 2$

a et b sont premiers entre si et seulement si n est pair.

Autre méthode :
On utilise la propriété de l'exercice I : $\text{pgcd}(a\ ;\ b) = \text{pgcd}(a - b\ ;\ b)$

$$\begin{aligned}\text{pgcd}(3n+1\ ;\ 2n) &= \text{pgcd}[(3n+1) - 2n\ ;\ 2n] = \text{pgcd}(n+1\ ;\ 2n) = \text{pgcd}[2n - (n+1)\ ;\ n+1]\\ &= \text{pgcd}(n-1\ ;\ n+1) = \text{pgcd}[(n+1) - (n-1)\ ;\ n+1] = \text{pgcd}(2\ ;\ n+1)\end{aligned}$$

- Si n est pair alors $n + 1$ est impair donc $\text{pgcd}(2\ ;\ n+1) = 1$ donc $3n + 1$ et $2n$ premiers entre eux.
- Si n est impair alors $n + 1$ est pair donc $\text{pgcd}(2\ ;\ n+1) = 2$ donc $3n + 1$ et $2n$ ne sont pas premiers entre eux.

EXERCICE 3

Équation diophantienne **(3 points)**

Soit l'équation (E) : $31x - 28y = 1$.

1) 31 et 28 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers (u, v) tel que : $31u - 28v = 1$

2) On applique l'algorithme d'Euclide puis on le remonte :
   $31 = 28 \times 1 + 3 \quad (1)$
   $28 = 3 \times 9 + 1 \quad (2)$
   On remonte l'algorithme d'Euclide :
   $$\begin{aligned}\text{de (2)} \quad 3 \times 9 &= 28 - 1\\ (1) \times 9 \quad 31 \times 9 &= 28 \times 9 + 3 \times 9\\ &= 28 \times 9 + 28 - 1\\ &= 28 \times 10 - 1\end{aligned}$$
   On a donc $31(-9) - 28(-10) = 1$
   $(-9\ ; -10)$ est une solution particulière de (E).

3) En soustrayant termes à termes les égalités :
   $$31x - 28y = 1 \quad \text{et} \quad 31(-9) - 28(-10) = 1$$
   On trouve : $31(x+9) - 28(y+10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 31(x+9) = 28(y+10) \quad (3)$

   28 divise $31(x + 9)$, or $\text{pgcd}(28, 31) = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, 28 divise $(x + 9)$. On a alors : $x + 9 = 28k, \quad k \in \mathbb{Z}$.
   En remplaçant dans (3), on a alors : $y + 10 = 31k$

Réciproquement on vérifie que les solutions vérifient (E).

L'ensemble des couples solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} x = -9 + 28k \\ y = -10 + 31k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$