Correction contrôle de mathématiques
du jeudi 19 mai 2016

EXERCICE 1

Produit de matrices **(2 points)**

On donne les matrices suivantes : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\times 45 + 30\times 60 & 20\times 50 + 30\times 50 \\ 15\times 45 + 25\times 60 & 15\times 50 + 25\times 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,700 & 2\,500 \\ 2\,175 & 2\,000 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

Système **(3 points)**

1) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

2) $\det(\mathbf{M}) = 6\times(-2) - 3\times 4 = -12 - 12 = -24.$

$\det(\mathbf{M}) \neq 0$, la matrice $\mathbf{M}$ est inversible.

3) $\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{-1}{24}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. On pose $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\mathbf{MX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \frac{-1}{24}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{24}\begin{pmatrix} -11 \\ 14 \end{pmatrix}$$

La solution du système (S) est donc : $x = \dfrac{11}{24}$ et $y = -\dfrac{14}{24} = -\dfrac{7}{12}$

EXERCICE 3

Matrice idempotente **(4 points)**

1) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} a^2 + bc = a \\ ab + bd = b \\ ac + cd = c \\ bc + d^2 = d \end{cases}$

2) a) $b = 0$, le système devient : $\begin{cases} a^2 = a \\ ac + cd = c \\ d^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \quad (1) \\ d(d-1) = 0 \quad (2) \\ ac + cd = c \quad (3) \end{cases}$

Les équations (1) et (2) donnent comme valeurs : $a = 0$ ou $a = 1$ et $d = 0$ ou $d = 1$.

On remplace dans l'équation (3)

- $a = 0$ et $d = 0$ alors $c = 0$
- $a = 1$ et $d = 0$ alors c quelconque.
- $a = 0$ et $d = 1$ alors c quelconque.
- $a = 1$ et $d = 1$ alors $c = 0$

Les quatre matrices possibles sont : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

b) $b = 1$, le système devient : $\begin{cases} a^2 + c = a \\ a + d = 1 \\ ac + cd = c \\ c + d^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - a^2 \\ d = 1 - a \end{cases}$

La matrice solution est alors : $\begin{pmatrix} a & 1 \\ a - a^2 & 1 - a \end{pmatrix}$

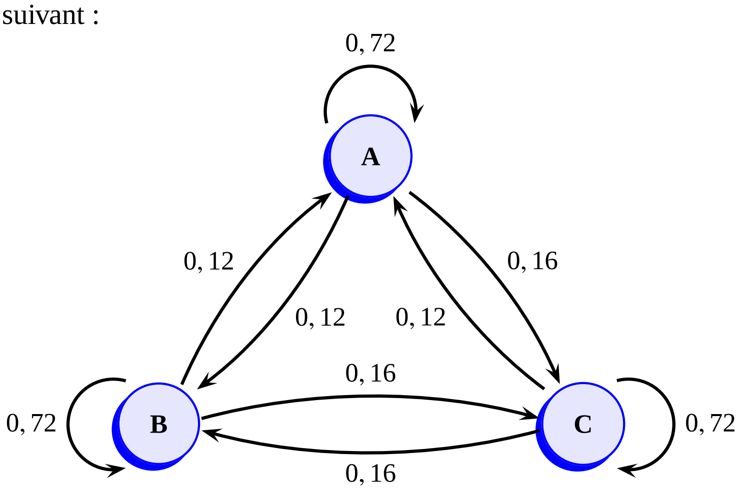
Exercice 4

Marche aléatoire **(11 points)**

1) On détermine les probabilités d'obtenir respectivement, un jeton rouge (R), un jeton vert (V) et un jeton blanc (B).

$$p(\text{R}) = \frac{3}{25} = 0,12 \quad , \quad p(\text{V}) = \frac{4}{25} = 0,16 \quad \text{et} \quad p(\text{B}) = \frac{18}{25}$$

On a le graphe suivant :



2) On obtient le système suivant : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n \\ b_{n+1} = 0,12a_n + 0,72b_n + 0,16c_n \\ c_{n+1} = 0,16a_n + 0,16b_n + 0,72c_n \end{cases}$

3) a) Comme initialement le pion est en A : $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n\mathbf{T} &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n & 0,12a_n + 0,72b_n + 0,16c_n & 0,16a_n + 0,16b_n + 0,72c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{X_{n+1}} \end{aligned}$$

b) $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0\mathbf{T}$, $\quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{T} = \mathbf{X}_0\mathbf{T}^2$, $\quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2\mathbf{T} = \mathbf{X}_0\mathbf{T}^3$, $\quad$ de proche en proche $\quad \mathbf{X}_n = \mathbf{X}_0\mathbf{T}^n$

4) a) On trouve : $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

b) Montrons par récurrence la propriété : $\mathbf{T}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$.

Initialisation : $n = 1$. Immédiat car $\mathbf{T} = \mathbf{PDP}^{-1}$. La proposition est initialisée.

Hérédité : : On suppose que $\mathbf{T}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$, montrons que $\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$
On multiplie à gauche l'hypothèse de récurrence par **T**, on obtient alors :
$\mathbf{T} \times \mathbf{T}^n = \mathbf{T} \times \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{PDP}^{-1} \times \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$
$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{PD}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDID}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\mathbf{T}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$ pour tout n non nul.

c) $\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$

5) a) $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_0\mathbf{T}^n \Leftrightarrow \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Comme $\mathbf{X}_n$ est une matrice probabiliste, on a $a_n + b_n + c_n = 1$.
On obtient alors $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$ car $-1 < 0,6 < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,56^n = 0$ car $-1 < 0,56 < 1$.

Par produit et somme :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{3}{10}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \dfrac{37}{110}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n - \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{37}{11} = \dfrac{40}{110} = \dfrac{4}{11}$

c) On a $\dfrac{3}{10} = \dfrac{33}{110}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n < \lim\limits_{n\to+\infty} b_n < \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.