# Correction contrôle de mathématiques

## Du jeudi 21 janvier 2016

## EXERCICE 1

**ROC** **(4 points)**

1) Voir cours.
2) Voir cours.
3) **Application.** $33a - 45b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 11a = 15b \;\; (1)$.

   15 divise $11a$, or $\text{pgcd}(11, 15) = 1$, d'après le théorème de Gauss 15 divise $a$.
   On a donc $a = 15k$, $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans (1), on a : $b = 11k$

   L'ensemble des couples $(a; b)$ sont de la forme : $\begin{cases} a = 15k \\ b = 11k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

## EXERCICE 2

**pgcd et nombres premiers entre eux** **(4 points)**

1) On a les divisions successives suivantes :

$$\begin{aligned} 87\,724 &= 23\,296 \times 3 + 17\,836 \\ 23\,296 &= 17\,836 \times 1 + 5\,460 \\ 17\,836 &= 5\,460 \times 3 + 1\,456 \\ 5\,460 &= 1\,456 \times 3 + 1\,092 \\ 1\,456 &= 1\,092 \times 1 + 364 \\ 1\,092 &= 364 \times 3 \end{aligned}$$

On a donc $\text{pgcd}(87\,724\,;\,23\,296) = 364$

2) On cherche une combinaison linéaire de $a$ et de $b$ pour supprimer $k$ :

$$-2a + 7b = -2(7k + 3) + 7(2k + 1) = -14k - 6 + 14k + 7 = 1$$

Il existe un couple $(u; v) = (-2; 7)$ tel que $au + bv = 1$, d'après de théorème de Bézout, les entiers $a$ et $b$ sont premiers entre eux pour tout entier $k$.

3) a) Soit $d = \text{pgcd}(7n + 6\,;\, 3n + 5)$. On cherche une combinaison linéaire pour supprimer $n$ :

$$(-3)(7n + 6) + 7(3n + 5) = -21n - 18 + 21n + 35 = 17$$

$d$ divise $(7n+6)$ et $(3n+5)$ donc $d$ divise toute combinaison linéaire de $(7n+6)$ et $(3n+5)$, donc $d$ divise $(-3)(7n + 6) + 7(3n + 5) = 17$

b) $(7n + 6)$ est divisible par 17 si, et seulement si, $7n + 6 \equiv 0\ (17) \quad \Leftrightarrow \quad 7n \equiv -6 \quad (E)$.

On multiplie $(E)$ par 5 : $35n \equiv -30\ (17)$, or $35 \equiv 1\ (17)$ et $-30 \equiv 4\ (17)$

On a donc : $n \equiv 4\ (17)$

En remplaçant dans $(3n + 5)$ : $3n + 5 \equiv 3 \times 4 + 5 \equiv 17 \equiv 0\ (17)$

Conclusion : $(7n + 6)$ et $(3n + 5)$ sont divisible par 17 si, et seulement si, $n \equiv 4\ (17)$

c) $n \equiv 4\ (17) \quad \Leftrightarrow \quad d = \text{pgcd}(7n+6\ ;\ 3n+5) = 17$

Comme $d$ divise 17 et 17 n'a que deux diviseurs 1 et 17, si $n \not\equiv 4\ (17)$, la fraction $q$ est irréductible.

## EXERCICE 3

**Système et équation** **(4 points)**

1) On pose $d = \text{pgcd}(x; y)$.
On a alors $x = dx'$ et $y = dy'$ avec $\text{pgcd}(x'; y') = 1$.
Le système devient donc :

$$\begin{cases} d = 6 \\ d^2 x'y' = 432 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ x'y' = \dfrac{432}{6^2} = 12 \end{cases}$$

$x'y'$ est une décomposition de 12 avec $\text{pgcd}(x'; y') = 1$. Les diviseurs de 12 sont $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

Les décompositions possibles sont : $1 \times 12$, $2 \times 6$ (non retenu car $\text{pgcd}(2, 6) = 2$), $3 \times 4$.

Les couples $(x'; y')$ possibles sont donc : $(1; 12)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(12; 1)$

Les couples $(x; y)$ solutions sont donc : $(6; 72)$, $(18; 24)$, $(24; 18)$, $(72; 6)$

2) a) 21 et 47 sont premiers entre eux, donc d'après le corollaire du théorème de Bézout, comme 3 est un multiple de $\text{pgcd}(21; 47) = 1$, il existe des solutions à l'équation $21x + 47y = 3$

b) On applique l'algorithme d'Euclide à 47 et 21 :

$47 = 21 \times 2 + 5 \quad (1)$

$21 = 5 \times 4 + 1 \quad (2)$

On remonte ensuite l'algorithme d'Euclide :

de (2) $\quad 5 \times 4 = 21 - 1$

$(1) \times 4 \quad 47 \times 4 = 21 \times 8 + 5 \times 4$

en remplaçant : $\quad 47 \times 4 = 21 \times 8 + 21 - 1$

$47 \times 4 = 21 \times 9 - 1$

$21 \times 9 + 47 \times (-4) = 1$

$(9\ ; -4)$ est une solution de $21x + 47y = 1$

En multipliant par 3 : $(27\ ; -12)$ est une solution de (E).

c) Soit $(x; y)$ une solution générale de (E). En soustrayant termes à termes les égalités suivantes :

$$21x + 47 = 3 \quad \text{et} \quad 21(27) + 47(-12) = 3$$

On obtient : $21(x - 27) + 47(y + 12) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 21(x - 27) = 47(-y - 12) \quad$ (E')

47 divise $21(x - 27)$, or $\text{pgcd}(21; 47) = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, 47 divise $(x - 27)$. On a alors : $x - 27 = 47k$, $k \in \mathbb{Z}$
En remplaçant de (E'), on a : $-y - 12 = 21k$

Réciproquement, on vérifie que les solutions vérifient (E).

L'ensemble des couples solutions de (E) sont de la forme :

$$\begin{cases} x = 27 + 47k \\ y = -12 - 21k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## EXERCICE 4

**Exercice BAC** **(8 points)**

**Partie A**

1) Thérème de Bézout : $a$ et $b$ premiers entre eux si et seulement si il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que : $au + bv = 1$

   51 et 26 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que $51u - 27v = 1$

2) a) $51(-1) - 26(-2) = -51 + 52 = 1$ donc $(-1\,;-2)$ est solution de cette équation.

   b) Soit $(x; y)$ une solution générale de l'équation. En soustrayant termes à termes les égalités suivantes :
   $$51x - 26y = 1 \quad \text{et} \quad 51(-1) - 26(-2) = 1$$
   On obtient : $51(x + 1) - 26(y + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 51(x + 1) = 26(y + 2) \quad$ (E')

   26 divise $51(x + 1)$, or $\text{pgcd}(51; 26) = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, 26 divise $(x + 1)$. On a alors : $x + 1 = 26k,\ k \in \mathbb{Z}$
   En remplaçant de (E'), on a : $y + 2 = 51k$

   Réciproquement, on vérifie que les solutions vérifient l'équation.

   L'ensemble des couples solutions de l'équation sont de la forme :
   $$\begin{cases} x = -1 + 26k \\ y = -2 + 51k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Partie B**

1) $\text{N} \Rightarrow 13 \Rightarrow f(13) = 51(13) + 2 = 625 \Rightarrow 665 \equiv 15\ (26) \Rightarrow 15 \Rightarrow \text{P}$

2) $51a \equiv 1\ [26] \quad \Leftrightarrow \quad 51a = 1 + 26k,\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 51a - 26k = 1,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

   Donc, d'après la partie A, $a$ est de la forme : $a = -1 + 26k$.

   Comme $0 \leqslant a \leqslant 25$, seul $k = 1$ correspond, donc $a = -1 + 26 = 25$

3) On a : $51x + 2 \equiv y\ [26] \quad \Leftrightarrow \quad 51x \equiv y - 2\ [26]$

   En multipliant par $a$, on obtient : $51a\,x \equiv ay + 2a$

   D'après la question précédente $51a \equiv 1\ [26]$ donc $x \equiv ay - 2a\ [26]$

   Comme $a = 25$, on a : $-2a = -50 = 26(-2) + 2$ donc $-2a \equiv 2\ [26]$.

   Conclusion : $x \equiv ay + 2\ [26] \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = ay + 2$

4) $\text{N} \Rightarrow 13 \Rightarrow f^{-1}(13) = 25(13) + 2 = 327 \Rightarrow 327 \equiv 15\ (26) \Rightarrow 15 \Rightarrow \text{P}$

   On constate que la lettre N se code et se décode en P.

5) D'après la question précédente, comme N se code et se décode en P, on peut raisonnablement penser que si l'on applique deux fois la fonction $f$ de codage, on obtient la fonction identité. Vérifions le :
   $$f[f(x)] \equiv f(51x + 2) \equiv 51(51x + 2) + 2 \equiv 2601x + 51 \times 2 + 2 \equiv x + 104 \equiv x\ [26]$$
   car $2601 = 26 \times 100 + 1 \equiv 1\ [26]$ et $104 = 26 \times 4 \equiv 0\ [26]$
   Si l'on applique deux fois de suite la fonction $f$ à une lettre, on obtient la même lettre. Si l'on réitère 50 fois cette opération soit 100 fois la fonction $f$, on obtient la même lettre de départ.