correction devoir du jeudi 05 janvier 2017

EXERCICE 1

Puzzle **(7 points)**

1) a) $\text{pgcd}(13, 17) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entier relatifs (u, v) tel que : $13u + 17v = 1$ (1).

b) D'après l'égalité (1), on a : $17v = 1 - 13u$.
On remplace dans n_0 : $n_0 = 5\times13u+2(1-13u) = 5\times13u+2-2\times13u = 3\times13u+2$.
Donc le reste de la division de n_0 par 13 est 2 donc $n_0 \equiv 2\ [13]$.

De même d'après l'égalité (1), on a : $13u = 1 - 17v$.
On remplace dans n_0 : $n_0 = 5\times(1-17v)+2\times17v = 5-5\times17v+2\times17v = -3\times17v+5$.
Donc le reste de la division de n_0 par 17 est 5 donc $n_0 \equiv 5\ [17]$.

Conclusion : $\begin{cases} n_0 \equiv 2\ [13] \\ n_0 \equiv 5\ [17] \end{cases}$, n_0 est solution de (S).

c) On peut donner une solution à l'égalité (1) en remontant l'algorithme d'Euclide :

$17 = 13 \times 1 + 4$ (2)
$13 = 4 \times 3 + 1$

donc $4 \times 3 = 13 - 1$.

$(2) \times 3$ $17 \times 3 = 13 \times 3 + 4 \times 3$
$17 \times 3 = 13 \times +13 - 1$
$17 \times 3 = 13 \times 4 - 1$
$13 \times 4 + 17 \times (-3) = 1$

Donc en remplaçant dans n_0, on obtient $n_0 = 5 \times 13 \times 4 + 2 \times 17 \times (-3) = 158$.

2) Caractérisation des éléments de (S)

a) Soit n un entier relatif appartenant à (S). Comme n_0 est aussi solution de (S), on a :
$\begin{cases} n \equiv 2\ [13] \\ n \equiv 5\ [17] \end{cases}$ et $\begin{cases} n_0 \equiv 2\ [13] \\ n_0 \equiv 5\ [17] \end{cases}$
On soustrait termes à termes les deux congruences, on obtient $n - n_0 \equiv 0\ [13]$ et $n - n_0 \equiv 0\ [17]$

13 et 17 divise alors $(n - n_0)$, comme $\text{pgcd}(13, 17) = 1$, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $13 \times 17 = 221$ divise $(n - n_0)$. On a donc $n - n_0 \equiv 0\ [221]$.

b) On a montré que si n appartient à (S) alors $n - n_0 \equiv 0\ [221] \Leftrightarrow n \equiv n_0\ [221]$.
Si on prend $n_0 = 158$, on a donc $n = 158 + 221k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement si $n = 158 + 221k$, on vérifie aisément que $n \in$ (S).

3) Application
D'après l'énoncé n est un élément de S, donc $n = 158 + 221k$

$0 \leqslant n < 1000 \Leftrightarrow 0 \leqslant 158 + 221k < 1000 \Leftrightarrow -58 \leqslant 221k < 842 \Leftrightarrow -\dfrac{58}{221} \leqslant k < \dfrac{842}{221}$.

or $-\dfrac{58}{221} \approx -0.26$ et $\dfrac{842}{221} \approx 3,81$ donc $0 \leqslant k \leqslant 3$

On teste les valeurs de k de 0 à 3, pour déterminer la solution qui est un nombre entier de centaines :

k	0	1	2	3
n	158	379	600	821

Le nombre de pièces du puzzle est de 600.

Exercice 2

Jetons **(3 points)**

1) a) $(-2\,;-3)$ ou $(3\,;4)$ sont solution de (E).

b) Soit (x, y) un couple solution de (E), comme $(-2\,;-3)$ est aussi solution de (E) :

$7x - 5y = 1$

$7(-2) - 5(-3) = 1$

En soustrayant termes à termes, on obtient :

$7(x+2) - 5(y+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7(x+2) = 5(y+3)$ (E').

5 divise $7(x+2)$, comme pgcd(5,7) = 1, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(x+2)$. On a alors $x + 2 = 5k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

en remplaçant dans (E'), on trouve $y + 3 = 7k$

L'ensemble des couples solutions (x, y) sont de la forme : $\begin{cases} x = -2 + 5k \\ y = -3 + 7k \end{cases},\ \ k \in \mathbb{Z}$

2) Soit x, y et z le nombre respectif de jetons rouges, verts et blancs.

On a donc $\begin{cases} x + y + z = 25 \ \ (1) \\ 7x - 5y = 1 \ \ (2) \end{cases}$

- De (1), on en déduit que $0 \leqslant x + y \leqslant 25$ (3)
- De (2) on obtient d'après la question 1) $x = -2 + 5k$ et $y = -3 + 7k$.
- En remplaçant dans (3) :

$0 \leqslant -2 + 5k - 3 + 7k \leqslant 25 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leqslant 12k \leqslant 30 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5}{12} \leqslant k \leqslant \dfrac{30}{12}$

or $\dfrac{5}{12} \approx 0,41$ et $\dfrac{30}{12} = \dfrac{5}{2} = 2,5$.

On a donc $1 \leqslant k \leqslant 2$. Il existe deux valeurs pour k : 1 et 2.

a) $k = 1$, alors $x = 3$, $y = 4$ et $z = 25 - 3 - 4 = 18$

b) $k = 2$, alors $x = 8$, $y = 11$ et $z = 25 - 8 - 11 = 6$