

Correction du devoir du jeudi 22 novembre 2018

EXERCICE 1

Divisibilité par 17

(3 points)

On a : $16 + 1 \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow 16 \equiv -1 \pmod{17}$ et $17 + 1 \equiv 1 \pmod{17} \Leftrightarrow 18 \equiv 1 \pmod{17}$

Par puissance : $16^{2n+1} + 18^n \equiv (-1)^{2n+1} + 1^n \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

Donc $16^{2n+1} + 18^n$ est divisible par 17.

EXERCICE 2

Divisibilité par 13

(6 points)

1) Par double implication en remarquant que $40 \equiv 1 \pmod{13}$

$$n \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 10a + b \equiv 0 \pmod{13} \xrightarrow{\times 4} 40a + 4b \equiv 0 \pmod{13} \xrightarrow{40 \equiv 1 \pmod{13}} a + 4b \equiv 0 \pmod{13}$$

Réciproquement :

$$a + 4b \equiv 0 \pmod{13} \xrightarrow{\times 10} 10a + 40b \equiv 0 \pmod{13} \xrightarrow{40 \equiv 1 \pmod{13}} 10a + b \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{13}.$$

Conclusion : n est divisible par 13 si, et seulement si, $a + 4b \equiv 0 \pmod{13}$.

2) "Un nombre est divisible par 13 si et seulement si, le nombre de ses dizaines augmenté du quadruple du chiffre de ses unités est divisible par 13".

On peut réitérer le processus si nécessaire.

3) On peut donner les multiples de 13 inférieurs à 100 : 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91.

On a les décompositions suivantes :

656 7	$656 + 4 \times 7 = 656 + 28 = 684$ $68 + 4 \times 4 = 68 + 16 = 84$	non divisible par 13
666 6	$666 + 4 \times 6 = 666 + 24 = 690$ $69 + 4 \times 0 = 69$	non divisible par 13
888 8	$888 + 4 \times 8 = 888 + 32 = 920$ $92 + 4 \times 0 = 92$	non divisible par 13
56955 6	$56955 + 4 \times 6 = 56955 + 24 = 56979$ $5697 + 4 \times 9 = 56971 + 36 = 57313$ $573 + 4 \times 3 = 573 + 12 = 585$ $58 + 4 \times 5 = 58 + 20 = 78$	divisible par 13

EXERCICE 3

Divisibilité par 11

(3 points)

On détermine le cycle des restes dans la division de 4^n par 11

$$4^0 \equiv 1 \pmod{11}, \quad 4^1 \equiv 4 \pmod{11}, \quad 4^2 \equiv 5 \pmod{11}, \quad 4^3 \equiv 9 \pmod{11}, \quad 4^4 \equiv 3 \pmod{11}, \quad 4^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

Le cycle est de 5. On remplit alors un tableau de congruence :

$n \equiv (5)$	0	1	2	3	4
$4^n \equiv (11)$	1	4	5	9	3
$3 \times 4^n \equiv (11)$	3	1	4	5	9
$3 \times 4^n + 2 \equiv (11)$	5	3	6	7	0

Conclusion : $3 \times 4^n + 2$ est divisible par 11 si, et seulement si $(n - 4)$ est divisible par 5.

EXERCICE 4

Divisibilité par 7

(3 points)

On remplit un tableau de congruence :

$n \equiv (7)$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv (7)$	0	1	4	2	2	4	1
$2n \equiv (7)$	0	2	4	6	1	3	5
$n^2 - 2n \equiv (7)$	0	6	0	3	1	1	3

Conclusion : $n^2 - 2n$ est divisible par 7 si, et seulement si n ou $(n - 2)$ est divisible par 7.

EXERCICE 5

Vrai-Faux

(5 points)

1) **Proposition 1 : Fausse** La multiplication modulo 6 n'est pas intègre, en effet :

$$\text{Si } a \equiv 2 \pmod{6} \text{ et } b \equiv 3 \pmod{6} \text{ alors } ab \equiv 2 \times 3 \equiv 6 \equiv 0 \pmod{6}$$

2) **Proposition 2 : Fausse** Trouvons un contre exemple :

$$\text{Si } x \equiv 8 \pmod{12} \text{ alors } 2x \equiv 2 \times 8 \equiv 16 \equiv 4 \pmod{12}$$

3) **Proposition 3 : Vraie** Par double implication

$$7 - x \equiv 5 \pmod{3} \Rightarrow -x \equiv -2 \pmod{3} \stackrel{\times(-1)}{\Rightarrow} x \equiv 2 \pmod{3}.$$

Réciproquement

$$x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 7 - x \equiv 7 - 2 \equiv 5 \pmod{3}$$