BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

- *Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité.*
- *La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 4 = 0$ ou $z^2 + 4 = 0$.

- $z^2 - 2z + 4 = 0$, on a $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2 < 0$.

  2 racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ ou $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

- $z^2 = -4 = (2i)^2 \quad \Leftrightarrow \quad z_3 = 2i$ ou $z_4 = -2i$.

$S = \left\{-2i\,;\ 2i\,;\ 1 - i\sqrt{3}\,;\ 1 + i\sqrt{3}\right\}$.

2) a) $|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \theta_A = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On a alors $z_A = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On sait que $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $z_B = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$.

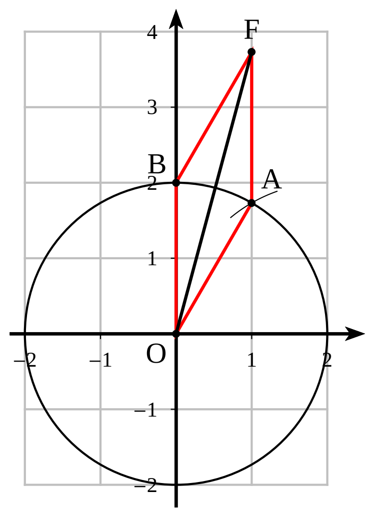
$|z_A| = |z_B| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad OA = OB = 2$. A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

b) On obtient la figure suivante :

c) $\left(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)$

$= \arg(z_B) - \arg(z_A)$

$= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.



3) a) $z_{\overrightarrow{AF}} = z_F - z_A = z_B = z_{\overrightarrow{OB}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OB}$. Le quadrilatère OAFB est un parallélogramme.

De plus $|z_A| = |z_B| \quad \Leftrightarrow \quad AF = OB$. Le parallélogramme OAFB a deux côtés consécutifs de même longueur donc OAFB est un losange.

b) Les diagonales dans un losange sont les bissectrices des côtés donc

$\left(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

$\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OF}\right) = \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

c) $|z_F| = |1 + i(2 + \sqrt{3}| = \sqrt{1 + (2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

$z_F = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

d) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\text{Re}(z_F)}{|z_F|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2(4-3)}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

4) Pour comparer les deux valeurs, on les élève au carré :

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Leurs carrés sont égaux, et comme les quantités sont manifestement positives, les deux résultats sont égaux. Il n'y a pas de contradiction. Heureusement !

EXERCICE 2 (5 points)

1) a) $g(0)=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+ke^0}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+k}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow k=7.$

b) $g(10)=\dfrac{64}{100} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+7e^{-10a}}=\dfrac{64}{100} \overset{\uparrow -1}{\Leftrightarrow} 1+7e^{-10a}=\dfrac{100}{64} \Leftrightarrow 7e^{-10a}=\dfrac{36}{64}=\dfrac{9}{16}.$

$\Leftrightarrow e^{-10a}=\dfrac{9}{112} \overset{\ln\ \text{monotone}}{\Leftrightarrow} -10a=\ln\left(\dfrac{9}{112}\right) \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{10}\ln\left(\dfrac{9}{112}\right)=\dfrac{1}{10}\ln\left(\dfrac{112}{9}\right)$

Une valeur approchée de a à 10^{-3} : $a=\dfrac{1}{10}\ln\left(\dfrac{112}{9}\right)\approx 0,252$

2) a) $f'(x)=\dfrac{-7\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{t}{4}}}{\left(1+7e^{-\frac{t}{4}}\right)^2}=\dfrac{\frac{7}{4}e^{-\frac{t}{4}}}{\left(1+7e^{-\frac{t}{4}}\right)^2}>0 \quad \text{car } \forall t\in\mathbb{R},\ e^t>0$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{4}=-\infty\\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t=0\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{4}}=0$

Par produit, somme et quotient : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=1$.

c) La fonction f est strictement croissante donc monotone et continue car dérivable sur $[0\,;+\infty[$, de plus $g(0)<0,99<\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g atteindra puis dépassera la valeur 0,99.

On pouvait également résoudre l'inéquation :

$g(t)\geqslant 0,99 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+7e^{-\frac{t}{4}}}\geqslant 0,99 \overset{\uparrow -1}{\Leftrightarrow} 1+7e^{-\frac{t}{4}}\leqslant\dfrac{100}{99} \Leftrightarrow 7e^{-\frac{t}{4}}\leqslant\dfrac{1}{99} \Leftrightarrow$

$e^{-\frac{t}{4}}\leqslant\dfrac{1}{693} \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} -\dfrac{t}{4}\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{693}\right) \overset{\times(-4)}{\Leftrightarrow} t\geqslant -4\ln\left(\dfrac{1}{693}\right) \Leftrightarrow t\geqslant 4\ln 693\ (\approx 26,16)$

À partir de 2027, plus de 99 % des ménages seront équipés d'une connexion internet fixe.

3) a) $g(18)=\dfrac{1}{1+7e^{-\frac{9}{2}}}\approx 0,928.$

Il y a 93 % de foyers équipés d'une connexion internet fixe au 1er janvier 2018.

Le sondage donne une proportion inférieur de $\dfrac{0,93-0,88}{0,88}\times 100\approx 5,7\ \%$ à la prédiction du modèle. Ce modèle est un peu optimiste et doit donc être minoré pour donner un chiffre plus réaliste.

b) $f(0) = e^{-2,1} \approx 0,122$, $f(10) = e^{-2,1\exp(-1,54)} \approx 0,638$ et $f(18) = e^{-2,1\exp(-2,772)} \approx 0,877$.
Ce modèle est plus réaliste car il tient compte des données initiales et se rapproche beaucoup plus des statistiques de 2018. En effet $f(0) \approx \dfrac{1}{8}$, $f(10) \approx 0,64$ et $f(18) \approx 0,88$

EXERCICE 3 (5 points)

1) a) $e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x + (e^x)^2 - e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = f(x)$.

b) Comme $\int e^x = e^x$ et $\int \dfrac{e^x}{1+e^x} = \int \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \ln|u(x)| = \ln|1+e^x| = \ln(1+e^x)$,

Une primitive de f est donc $F(x) = e^x - \ln(1+e^x)$.

c) $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[e^x - \ln(1+e^x)\Big]_0^1 = [e - \ln(1+e)] - (1 - \ln 2) = e - 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$.

Comme f est continue et $f > 0$ sur [0,1], l'intégrale I représente l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 0$ et $x = 1$

2) Soit V la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t_1, on a alors

$$V = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{30}\left[\frac{1}{24}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + t\right]_0^1 = \frac{1}{30}\left(\frac{27\,000}{24} + \frac{900}{4} + 30\right) = \frac{1380}{30}$$

$$= 46 \text{ m/s} \overset{\times 3,6}{=} 165,6 \text{ km/h}$$

3) D'après la figure la droite est au dessus de la courbe donc $g \geqslant f$ sur [0,5].

L'aire hachurée est donc : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^5 [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^5 \left(-\frac{3}{4}x + 4 - \frac{4}{3x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$\int \frac{4}{3x+1} = \int \frac{4}{3} \times \frac{3}{3x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{u'}{u} = \frac{4}{3}\ln(3x+1)$$

$$\mathscr{A} = \left[-\frac{3}{8}x^2 + 4x - \frac{4}{3}\ln(3x+1\right]_0^5 = -\frac{75}{8} + 20 - \frac{4}{3}\ln(16) = \frac{-75+160}{8} - \frac{4}{3}(4\ln 2)$$

$$= \frac{85}{8} - \frac{16}{3}\ln 2$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) On rajoute 80 cétacés puis à ce nouveau total on applique une baisse de 5 %.

$u_1 = (u_0 + 80) - 0,05(u_0 + 80) = 0,95(u_0 + 80) = 0,95 \times 3\,080 = 2\,926.$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 0,95(u_n + 80) = 0,95u_n + 0,95 \times 80 = 0,95u_n + 76.$

3) On entre dans la cellule C2 : $\boxed{= 0,95 * \text{B2} + 76}$.

4) a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant 1\,520.$

Initialisation : $n = 0$: $u_0 = 3000 \geqslant 1\,520$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 1\,520$, montrons que $u_{n+1} \geqslant 1\,520$.

$$u_n \geqslant 1\,520 \overset{\times 0,95}{\Rightarrow} 0,95u_n \geqslant 1\,444 \overset{+76}{\Rightarrow} 0,95u_n + 76 \geqslant 1\,520 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 1\,520.$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant 1\,520.$

b) $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76$. D'après la question précédente :

$$u_n \geqslant 1\,520 \overset{\times(-0,05)}{\Rightarrow} -0,05u_n \leqslant -76 \overset{+76}{\Rightarrow} -0,05u_n + 76 \leqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

La suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 520, d'après le théorème des suites monotone, la suite (u_n) est convergente.

5) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1\,520 = 0,95u_n - 1\,444 = 0,95(u_n - 1\,520) = 0,95v_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,95$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = 3000 - 1\,520 = 1\,480$.

b) On a alors : $v_n = v_0\, q^n = 1\,480 \times 0,95^n$ donc $u_n = v_n + 1\,520 = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520.$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$ car $-1 < 0,95 < 1$. Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1\,520.$

6) On obtient l'algorithme complété suivant :

L'algorithme donne alors : $n = 22$.

Entrées et initialisation
- $n \leftarrow 0$
- $u \leftarrow 3\,000$

Traitement
- **tant que** $u \geqslant 2\,000$
  - **faire**
    - $n \leftarrow n + 1$
    - $u \leftarrow 0,95u + 76$
  - **fin**

Sorties : Afficher n

7) À partir de la 22[e] année, la population de cétacés tombera en dessous de 2 000, donc la réserve fermera en $2017 + 22$ soit en 2039.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) $u_{n+1} = 3u_n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (-3)u_n + (1)u_{n+1} = 1$.

Il existe une combinaison linéaire de u_n et u_{n+1} égale à 1, d'après le théorème de Bézout, les entier u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2) D'après les règles de parité : le produit de deux entiers dont l'un est pair, est pair et le produit de deux entiers impairs est impair.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \text{ pair } \Rightarrow \quad 3u_n \text{ pair} \\ u_n \text{ impair } \Rightarrow 3u_n \text{ impair} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \text{ et } 3u_n \text{ même parité } \Rightarrow u_n \text{ et } 3u_n+1 \text{ parités contraires.}$$

Les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

3) L'affirmation est fausse (sinon cela se saurait). Cherchons un contre-exemple :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	1	4	13	40	$121 = 11^2$

$p = 5$ est donc notre contre-exemple car u_5 n'est pas premier bien que 5 soit un premier impair.

4) a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 2u_n = 3^n - 1$.

Initialisation : $n = 0,\ 3^0 - 1 = 0 = 2u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2u_n = 3^n - 1$, montrons que $2u_{n+1} = 3^{n+1} - 1$.

$$2u_{n+1} = 2(3u_n + 1) = 3(2u_n) + 2 \overset{\text{HR}}{=} 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1.$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité ; $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 2u_n = 3^n - 1$.

b) On teste les premières puissance de 3 :

$3^0 \equiv 1\ [7],\ 3^1 \equiv 3\ [7],\ 3^2 \equiv 2\ [7],\ 3^3 \equiv 6\ [7],\ 3^4 \equiv 4\ [7],\ 3^5 \equiv 5\ [7],\ 3^6 \equiv 1\ [7]$.

Le plus petit entier non nul est donc $n = 6$.

c) Le cycle des puissances est de 6 : $2022 = 6 \times 337$ donc $3^{2022} \equiv (3^6)^{337} \equiv 1^{337} \equiv 1\ [7]$.

On en déduit que 7 divise $3^{2022} - 1 = 2u_{2022}$ comme 7 et 2 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 7 divise u_{2022}.

5) a) On peut remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n	0	1	4	13	40
$u_n \equiv\ [5]$	0	1	4	3	0

b) On obtient le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5	1	4	2	0	3

c) Comme $u_{n+1} = 3u_n + 1$, d'après le tableau de la question précédente :

$$u_n \equiv 4\ [5] \Rightarrow u_{n+1} \equiv 3\ [5] \Rightarrow u_{n+2} \equiv 0\ [5] \Rightarrow u_{n+3} \equiv 1\ [5] \Rightarrow u_{n+4} \equiv 4\ [5]$$

d) D'après la question 5a) les restes dans division de u_n par 5 ont un cycle de 4 et prend successivement les valeurs : 0, 1, 4, 3

Il ne peut donc y avoir un reste égal à 2.