Correction du devoir du mercredi 06 novembre 2019

EXERCICE 1

Divisibilité et diviseur **(4 points)**

1) $(n-4)$ divise $(3n-17)$, il existe un entier relatif k tel que :

$$3n-17=k(n-4) \Leftrightarrow 3(n-4)-5=k(n-4) \Leftrightarrow (n-4)(3-k)=5$$

$(n-4)$ divise alors 5 donc $(n-4)\in\{-5,-1,\ 1,\ 5\}$ soit $n\in\{-1,\ 3,\ 5,\ 9\}$.

2) La fraction $\dfrac{6n+12}{2n+1}$ est un entier relatif si, et seulement si, $(2n+1)$ divise $(6n+12)$.

$(2n+1)$ divise $(6n+12)$, il existe un entier relatif k tel que :

$$6n+12=k(2n+1) \Leftrightarrow 3(2n+1)+9=k(2n+1) \Leftrightarrow (2n+1)(k-3)=9$$

$(2n+1)$ divise alors 9 donc $(2n+1)\in\{-9,-3,-1,\ 1,\ 3,\ 9\}$ soit $n\in\{-5,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 4\}$.

3) $n^2-1=(n-1)(n+1)$

Si n est impair alors $(n-1)$ et $(n+1)$ sont deux nombres pair consécutifs dont l'un des deux est un multiple de 4.

En conséquence, il existe $k,k'\in\mathbb{Z}$ tel que : $n^2-1=(2k)(4k')=8kk'$.

(n^2-1) est divisible par 8.

4) Soit d un diviseur commun à a et b.
d divise a et b donc d divise toute combinaison linéaire de a et de b donc d divise :

$$5a-4b=5(4k+3)-4(5k-7)=20k+15-20k+28=43$$

Comme 43 est un nombre premier, d peut prendre les valeurs : -43, -1, 1 et 43.

EXERCICE 2

Division euclidienne **(3 points)**

1) a) $-1\,208=23(-51)-35=51(-23)-51+16=51(-24)+16$.

Le quotient et le reste dans la division de $-1\,208$ par 51 sont -24 et 16.

b) $1\,208=23\times 51+35=23\times 51+23+12=23\times 52+12$

Le quotient et le reste dans la division de 1 208 par 23 sont 52 et 12.

2) Soit q le quotient des divisions de n par 152 et 147. On a alors :

$$\begin{cases} n=152q+13 \\ n=147q+98 \end{cases} \Rightarrow 152q+13=147q+98 \Rightarrow 5q=85 \Rightarrow q=17$$

Le nombre n cherché est : $n=152\times 17+13=2\,597$.

EXERCICE 3

Restes **(2 points)**

1) $39 = 7 \times 5 + 4$ donc $39 \equiv 4 \ (7)$.

$$39 \equiv 4 \ (7) \overset{\uparrow 60}{\Leftrightarrow} 39^{60} \equiv 4^{60} \equiv 2^{120} \equiv (2^3)^{40} \ (7) \overset{2^3 \equiv 1 \ (7)}{\Leftrightarrow} 39^{60} \equiv 1^{40} \equiv 1 \ (7)$$

Le reste de la division de 39^{60} par 7 est 1.

2) $16 \equiv 17 - 1 \equiv -1 \ (17) \overset{\uparrow(2n+1)}{\Leftrightarrow} 16^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \equiv -1 \ (17)$.

$18 \equiv 1 \ (17) \overset{\uparrow n}{\Leftrightarrow} 18^n \equiv 1^n \equiv 1 \ (17)$.

Par somme $16^{2n+1} - 18^n \equiv -1 + 1 \equiv 0 \ (17)$.
Le reste de la division de $16^{2n+1} + 18^n$ est 0.

EXERCICE 4

Tableau de congruence **(4 points)**

1) On obtient le tableau suivant :

$x \equiv \quad (4)$	0	1	2	3
$x^2 \equiv \quad (4)$	0	1	0	1

2) En raisonnant modulo 4, on a $7x^2 - 4y^2 = 1 \overset{4 \equiv 0 \ (4)}{\Rightarrow} 7x^2 \equiv 1 \ (4)$.

Or x^2 est congru à 0 ou 1 modulo 4 donc $7x^2$ est congru à 0 ou $7 \equiv 3$ modulo 4.
Donc $7x^2 \not\equiv 1 \ (4)$ et donc l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

3) D'après le tableau de congruence un carré est congru à 1 modulo 4 si le nombre est impair.
En conséquence $(x+3)^2 \equiv 1 \ (4) \Leftrightarrow n + 3 \equiv 1 \ (2) \Leftrightarrow n \equiv -3 + 1 \equiv -2 \equiv 0 \ (2)$.

L'équation est donc vérifiée si n est pair.

EXERCICE 5

Démonstration **(2 points)**

Par récurrence :

Initialisation : $k = 1$, $a \equiv b \ (n)$ par hypothèse. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $a^k \equiv b^k \ (n)$, montrons que $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \ (n)$.

HR $a^k \equiv b^k \ (n)$, comme la congruence est compatible avec la multiplication, en multipliant terme à terme avec $a \equiv b \ (n)$ on obtient $a \times a^k \equiv b \times b^k \ (n) \Leftrightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1} \ (n)$.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ a^k \equiv b^k \ (n)$.

Exercice 6

Vrai-Faux **(5 points)**

1) **Proposition 1 : Vraie**

$2018 = 7 \times 288 + 2$ et $2020 = 3 \times 673 + 1$.

$$2\,018 \equiv 2 \ (7) \overset{\uparrow 2\,020}{\Leftrightarrow} 2\,018^{2\,020} \equiv 2^{2\,020} \equiv (2^3)^{673} \times 2 \ (7) \overset{2^3 \equiv 1 \ (7)}{\Leftrightarrow} 2\,018^{2\,020} \equiv 1^{673} \times 2 \equiv 2 \ (7)$$

2) **Proposition 2 : Vraie**

$11 = 9 \times 1 + 2$, $2\,012 = 3 \times 670 + 2$ et $2^3 \equiv 9 - 1 \equiv -1 \ (9)$

$$11 \equiv 2 \ (9) \overset{\uparrow 2\,012}{\Leftrightarrow} 11^{2\,012} \equiv 2^{2\,012} \equiv (2^3)^{670} \times 2^2 \ (9) \overset{2^3 \equiv -1 \ (9)}{\Leftrightarrow} 11^{2\,012} \equiv (-1)^{670} \times 2^2 \equiv 4 \ (9)$$

3) **Proposition 3 : Fausse**

Par un tableau de congruence :

$x \equiv \quad (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 + x + 3 \equiv \quad (5)$	3	0	4	0	3

Donc si $x \equiv 3 \mod 5 \Rightarrow x^2 + x + 3 \equiv 0 \mod 5$

La proposition vraie serait :
$x^2 + x + 3 \equiv 0 \ (5) \Leftrightarrow x \equiv 1 \ (5)$ ou $x \equiv 3 \ (5)$