Correction du devoir du 6 Avril 2020

EXERCICE 1

Critère d'arrêt **(3 points)**

1) « Si un nombre n n'est pas premier alors, il admet un diviseur premier p tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$ ».

On peut aussi utiliser la contraposée : « si un nombre n n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$ alors, n est premier. »

2) Pour 157, on teste les diviseurs premiers : 2, 3, 5, 7, 11.
- D'après les règles de divisibilité, 157 n'est pas divisible par 2, 3, 5 et 11.
- $157 = 7 \times 22 + 1$, donc 157 n'est pas divisible par 7.

Conclusion : D'après le critère d'arrêt 157 est premier.

Pour 427, on teste les diviseurs premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
- D'après les règles de divisibilité, 427 n'est pas divisible par 2, 3, 5 et 11.
- $427 = 7 \times 61$, donc 427 est divisible par 7.

Conclusion : D'après le critère d'arrêt 427 n'est pas premier.

EXERCICE 2

Nombre de diviseurs **(5 points)**

1) On a : $36n = 2^2 \times 3^2 \times 2^\alpha \times 3^\beta = 2^{\alpha+2} \times 3^{\beta+2}$

Comme $36n$ a trois fois plus de diviseurs que n, on a :

$$(\alpha+3)(\beta+3) = 3(\alpha+1)(\beta+1) \Leftrightarrow \alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 9 = 3\alpha\beta + +3\alpha + 3\beta + 3 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 6 \Leftrightarrow \alpha\beta = 3$$

On a donc les choix suivants :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow n = 2 \times 3^3 = 54 \qquad \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow n = 2^3 \times 3 = 24$$

2) a) $2\,268 = 2^2 \times 3^4 \times 7$, donc possède $(2+1)(4+1)(1+1) = 30$ diviseurs.

b) Soit $d = \text{pgcd}(a,b)$ on a alors $a = da'$ et $b = db'$ avec $\text{pgcd}(a',b') = 1$.

Comme tout diviseur commun à a et b divise d alors d possède 6 diviseurs.

De plus $ab = 2\,268 \Leftrightarrow da' \times db' = 2\,268 \Leftrightarrow d^2a'b' = 2\,268$.

On en déduit que d^2 divise $2^2 \times 3^4 \times 7$ et comme dans la décomposition de d^2 toutes les puissances sont paires, d^2 divise $2^2 \times 3^4$ et donc d divise 2×3^2.

Comme 2×3^2 possède 6 diviseurs, on en déduit que $d = 2 \times 3^2 = 18$.

Comme $a < b$ alors $a' < b'$, on a alors $a'b' = 7 \Rightarrow a' = 1$ et $b' = 7$.

On en déduit que : $a = 18$ et $b = 18 \times 7 = 126$.

Exercice 3

Démonstration **(2 points)**

Soit $E = \{2, 3, 4, \dots, p-1\}$. Montrons que la propriété par double implication.

- Soit p un nombre premier, $a \in E$ et $d = \text{pgcd}(p, a)$.
  Comme p est premier $d = 1$ ou $d = p$.
  or $1 < a < p$, on en déduit alors que $d = 1$.
- Réciproquement, supposons que : $\forall a \in E$, $\text{pgcd}(a, p) = 1$.
  On en déduit que p n'a aucun diviseur entre 2 et $(p-1)$ donc p est premier.

Exercice 4

Résolution d'équations **(3 points)**

1) $x^2 - y^2 = 11 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 11$ or 11 est premier et $(x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow (x-y) < x+y)$.

   La seule solution est : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$

2) $x^2 - y^2 = p \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = p$ or p est premier et $(x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x - y < x + y)$.

   La seule solution est : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = p \end{cases} \overset{p \geqslant 3 \text{ impair}}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \dfrac{p+1}{2} \\ y = \dfrac{p-1}{2} \end{cases}$

   si $p = 2$, il n'y a pas de solution.

Exercice 5

Trouver un entier **(2 points)**

1) n admet 14 diviseurs et 14 ne peut se décomposer au maximum en deux facteurs ($14 = 2 \times 7$). Le nombre n ne peut donc avoir plus de deux diviseurs premiers dont l'un est 2 car n est divisible par 4.

2) Si n a un seul diviseur premier alors :
   $n = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 14 \Leftrightarrow \alpha = 13$. or $2^{13} = 8\,192 > 1000$.

   Les nombres n inférieurs à 1 000 ont donc deux diviseurs premiers : $n = 2^\alpha \times p_2^\beta$ avec $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 14$ et $\alpha \geqslant 2$ car n est divisible par 4.

   On en déduit alors que $\begin{cases} \alpha + 1 = 7 \\ \beta + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 2^6 \times p_2$

   $n < 1000 \Rightarrow 2^6 \times p_2 < 1000 \Rightarrow p_2 < \dfrac{1000}{2^6} \Rightarrow p_2 \leqslant 15.$

   p_2 est à chercher dans l'ensemble $E = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ comme $n = 37p + 1$, 37 divise $(n-1)$.

   On teste les valeurs de E, on trouve une seule solution $p_2 = 11 \Rightarrow n = 704$.
   On a alors $704 = 37 \times 19 + 1$.

EXERCICE 6

Nombres croisés **(5 points)**

Voici la grille corrigée

	a	b	c	d	e
A	9	2	4	1	6
B	1		9	7	1
C	1	1		3	
D	2	3	4	5	6
E	5	5		1	0