BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 1 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (6 points)

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par : $a_n = \dfrac{4^{2n+1}+1}{5}$.

1) Calculer a_2 et a_3.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 16a_n - 3$.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un nombre entier naturel.

4) Dans cette question on utilise l'égalité de la question 2) afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).

   a) Pour tout entier naturel n, on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1}.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n : d_n est égal à 1 ou à 3.

   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} \equiv a_n \ (3)$.

   c) Vérifier que $a_0 \equiv 1 \ (3)$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.

   d) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n : a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 2 (4 points)

1) On considère l'équation (E) : $19x - 6y = 1$.

   a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$.

   b) En déduire le nombre de couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation (E) et vérifiant

$$2\,000 \leqslant x \leqslant 2\,100.$$

2) Soit n un entier naturel. Montrer que les entiers $(2n+3)$ et $(n+3)$ sont premiers entre eux **si et seulement si** n n'est pas un multiple de 3.