

Contrôle de mathématiques

Mercredi 27 novembre 2019

EXERCICE 1

Diviseurs

(2,5 points)

- 1) Déterminer les diviseurs positifs de 28.
- 2) On veut résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation (E) : $x^2 - 4y^2 = 28$.
 - a) À l'aide d'une factorisation, déterminer les systèmes d'équations possibles.
 - b) En déduire la ou les solution(s) de l'équation (E).

EXERCICE 2

Division euclidienne

(2 points)

On donne l'égalité suivante : $842\,295 = 3251 \times 259 + 286$

Sans faire de division donner :

- 1) Le quotient et le reste de 842 295 dans la division euclidienne par 259
- 2) Le quotient et le reste de $-842\,295$ dans la division euclidienne par 3251.

EXERCICE 3

Congruence

(3 points)

- 1) Donner suivant les valeurs de n , les restes de 6^n dans la division par 7.
- 2) En déduire, en vous justifiant, le reste dans la division par 7 de : $451 \times 6^{43} - 912$

EXERCICE 4

PGCD

(4 points)

- 1) a) Déterminer les entiers naturels n tels que : $\text{pgcd}(n, 150) = 6$.
b) En déduire les entiers naturels n inférieurs à 50.
- 2) a) À l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer : $\text{pgcd}(527, 713)$
b) L'équation $713x - 527y = 93$ admet-elle des solutions entières ?
On citera le théorème utilisé.

EXERCICE 5

PGCD bis

(3 points)

Soit n un entier naturel non nul. On pose : $a = 3n + 1$ et $b = 5n - 1$.

- 1) Montrer que $\text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur de 8.
- 2) Pour quelles valeurs de n , $\text{pgcd}(a, b) = 8$.

EXERCICE 6

Théorème de Bézout

(4 points)

- 1) a) Citer le théorème de Bézout.
b) À l'aide de l'identité de Bézout : soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$, si $D = \text{pgcd}(a, b)$ alors il existe un couple d'entier relatif (u, v) tels que $au + bv = D$, démontrer le théorème de Bézout.

- 2) Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a = 14n + 3$ et $b = 5n + 1$.
- Montrer que, pour tout n , les entiers a et b sont premiers entre eux.
 - En déduire, en s'appuyant sur ce que l'on vient de démontrer, $\text{pgcd}(87, 31)$.

EXERCICE 7

Entiers de Bézout

(1,5 points)

- Montrer que 17 et 40 sont premiers entre eux.
- Déterminer un couple d'entiers relatifs (x, y) tel que : $17x - 40y = 1$