Les coniques

Table des matières

1 Étude analytique

1.1 Définition

Définition 1 : On appelle conique les courbes du second degré c'est à dire les courbes dont les points M(x, y), dans un repère orthonormé, vérifient l'équation implicite suivante :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad \text{avec} \quad |a| + |b| \neq 0$$

Les coefficients a, b, c, d et e étant réels

Remarque :

- Les coniques doivent leur nom à la section d'un cône par un plan. Les grecs leur avaient donné comme nom : ellipse, hyperbole, parabole.
- La condition $|a| + |b| \neq 0$ signifie que les coefficients a et b ne peuvent être nuls en même temps ce qui marque le second degré.

1.2 Coniques dépourvues de centre

Théorème 1 : Lorsque le produit $ab = 0$ avec $|a| + |b| \neq 0$, on a si :

1) $a = 0$ et $c = 0$ suivant le signe de $\Delta'_1 = d^2 - be$
   - $\Delta'_1 > 0$ **deux droites horizontales** d'équation $y = y_1$ et $y = y_2$
   - $\Delta'_1 = 0$ **une droite horizontale** d'équation $y = y_0$
   - $\Delta'_1 < 0$ aucun point

2) $a = 0$ et $c \neq 0$ **une parabole** d'axe parallèle à (Ox) du type $Y^2 = 2pX$

3) $b = 0$ et $d = 0$ suivant le signe de $\Delta'_2 = c^2 - ae$
   - $\Delta'_2 > 0$ **deux droites verticales** d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$
   - $\Delta'_2 = 0$ **une droite verticale** d'équation $x = x_0$
   - $\Delta'_1 < 0$ aucun point

4) $b = 0$ et $d \neq 0$ **une parabole** d'axe parallèle à (Oy) du type $Y = \alpha X^2$

Démonstration : On détaillera les cas avec $a = 0$. Les cas avec $b = 0$ se démontrent pareillement.

1) $a = 0$ et $c = 0$, on obtient alors : $by^2 + 2dy + e = 0$. C'est une équation réduite en y avec x quelconque.
   On calcule le discriminent réduit : $\Delta'_1 = d^2 - be$
   - si $\Delta'_1 > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes en y. On obtient alors deux droites horizontales d'équation $y = y_1$ et $y = y_2$

- si $\Delta'_1 = 0$, l'équation admet alors une solution double en y. On obtient alors une droite horizontale d'équation $y = y_0$
- si $\Delta'_1 < 0$, l'équation n'admet pas de solution en y. Il n'y a donc aucun point vérifiant l'équation.

2) $a = 0$ et $c \neq 0$ l'équation devient :

$$by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\left[\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 - \frac{d^2}{b^2}\right] = -2cx - e$$

$$\Leftrightarrow \quad b\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 = -2cx + \frac{d^2}{b} - e \quad \Leftrightarrow \quad b\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 = -2c\left(x + \frac{d^2 - be}{2bc}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(y + \frac{d}{b}\right)^2 = -\frac{2c}{b}\left(x + \frac{\Delta'_1}{2bc}\right)$$

On pose alors : $p = -\dfrac{c}{b}$ et l'on fait le changement de repère suivant :

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{\Delta'_1}{2bc} \\ Y = y + \dfrac{d}{b} \end{cases} \quad \text{de nouvelle origine} \quad \Omega\left(-\frac{\Delta'_1}{2bc}\,;\,-\frac{d}{b}\right)$$

On obtient la courbe d'équation $Y^2 = 2pX$ dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

La courbe est donc la réunion des deux demi-parabole d'axe (ΩX) d'équations $Y = \pm\sqrt{2pX}$

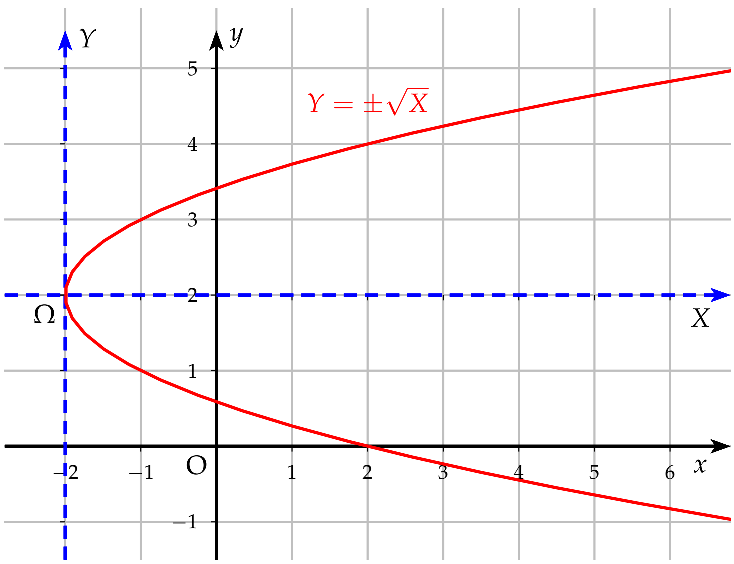
Exemple : Construire la parabole d'équation : $y^2 - x - 4y + 2 = 0$

On change la forme :

$$(y-2)^2 - 4 - x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = x + 2$$

On fait le changement de repère suivant $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ et on pose $\Omega(-2\,;\,2)$

On obtient la parabole $Y^2 = X$, décomposée en deux demi-paraboles $Y = \pm\sqrt{X}$



1.3 Coniques à centre

Théorème 2 : Lorsque le produit $ab \neq 0$, la conique possède un centre et son équation peut s'écrire sous la forme :

$$aX^2 + bY^2 = k \quad \text{de centre} \quad \Omega\left(-\frac{c}{a}\,;\,-\frac{d}{b}\right)$$

1) $ab > 0$ (par exemple $a > 0$ et $b > 0$)

- $k = 0$ La conique se réduit à **un seul point** Ω.
- $k < 0$ La conique ne possède **aucun point**.
- $k > 0$ La conique est **une ellipse** d'équation du type $\dfrac{X^2}{\alpha^2} + \dfrac{Y^2}{\beta^2} = 1$

2) $ab < 0$

- $k = 0$ La conique est l'union de **deux droites** d'équation $Y = \pm X\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$ symétriques par rapport à (ΩX) et (ΩY)
- $k \neq 0$ La conique est **une hyperbole** d'équation du type $\dfrac{X}{\alpha^2} - \dfrac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ d'asymptotes $Y = \pm\dfrac{\beta}{\alpha}X$

Remarque : Toutes ses coniques possèdent deux axes de symétrie (ΩX) et (ΩY).

Démonstration : On change la forme de l'équation :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \;\Leftrightarrow\; a\left(x^2 + \frac{2c}{a}\right) + b\left(y^2 + \frac{2d}{b}\right) + e = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$a\left[\left(x + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2}\right] + b\left[\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 + \frac{d^2}{b^2}\right] + e = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$a\left(x + \frac{c}{a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 = \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e$$

On pose alors $k = \dfrac{c^2}{a} + \dfrac{d^2}{b} - e$ et l'on fait le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{c}{a} \\ Y = y + \dfrac{d}{b} \end{cases} \quad \text{de nouvelle origine} \quad \Omega\left(-\frac{c}{a}\,;\,-\frac{d}{b}\right)$$

On obtient alors l'équation : $aX^2 + bY^2 = k$

1) $ab > 0$ (par exemple $a > 0$ et $b > 0$)

- Si $k = 0$ la seule solution de l'équation est $X = 0$ et $Y = 0$, donc la conique se réduit à Ω
- Si $k < 0$ l'équation n'a pas de solution donc la conique ne possède aucun point.

- Si $k > 0$, on divise par k : $\dfrac{a}{k}X^2 + \dfrac{b}{k}Y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{X^2}{\frac{k}{a}} + \dfrac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$

  On pose alors comme $a > 0,\ b > 0$ et $k > 0$: $\alpha^2 = \dfrac{k}{a}$ et $\beta = \dfrac{k}{b}$

  on obtient alors : $\dfrac{X^2}{\alpha^2} + \dfrac{Y^2}{\beta^2} = 1$ équation d'une ellipse

  Remarque :
  α : longueur de demi-axe horizontal de l'ellipse
  β : longueur de demi-axe vertical de l'ellipse
  si $\alpha = \beta$ l'ellipse est alors un cercle de rayon α.

2) $ab < 0$

- Si $k = 0$ l'équation devient $Y^2 = -\dfrac{a}{b}X^2 \quad \Leftrightarrow \quad Y = \pm X\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$. la conique est alors la réunion de deux droites.

- Si $k \neq 0$, on divise par k : $\dfrac{a}{k}X^2 + \dfrac{b}{k}Y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{X^2}{\frac{k}{a}} + \dfrac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$

  Comme a et b sont de signes contraires deux cas sont envisageables :

  a) $\dfrac{k}{a} > 0$ et $\dfrac{k}{b} < 0$, on pose alors : $\alpha^2 = \dfrac{k}{a}$ et $\beta^2 = -\dfrac{k}{b}$

     l'équation devient alors $\dfrac{X^2}{\alpha^2} - \dfrac{Y^2}{\beta^2} = 1$

  b) $\dfrac{k}{a} < 0$ et $\dfrac{k}{b} > 0$, on pose alors : $\alpha^2 = -\dfrac{k}{a}$ et $\beta^2 = \dfrac{k}{b}$

     l'équation devient alors $-\dfrac{X^2}{\alpha^2} + \dfrac{Y^2}{\beta^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{X^2}{\alpha^2} - \dfrac{Y^2}{\beta^2} = -1$

  On obtient alors dans ces deux cas l'équation d'une hyperbole.

Exemples : Construire les courbes suivantes :

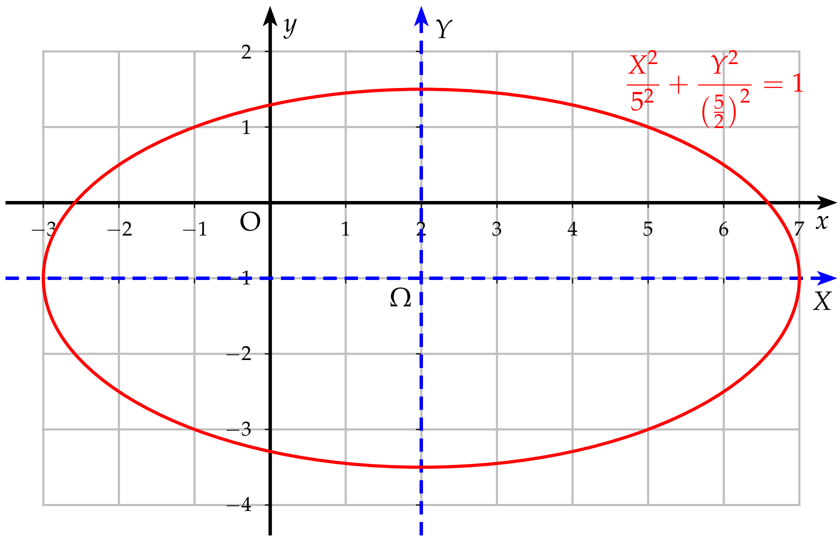
a) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$
b) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 0$

a) On change la forme de l'équation :

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4(y^2 + 2y) - 17 = 0$$
$$(x-2)^2 - 4 + 4(y+1)^2 - 4 - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 25$$

On pose alors $\alpha^2 = 25$ et $\beta^2 = \dfrac{25}{4}$ et l'on fait le changement de repère suivant : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$ et on pose $\Omega(2\,;\,-1)$

On obtient l'ellipse $\dfrac{X^2}{5^2} + \dfrac{Y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$

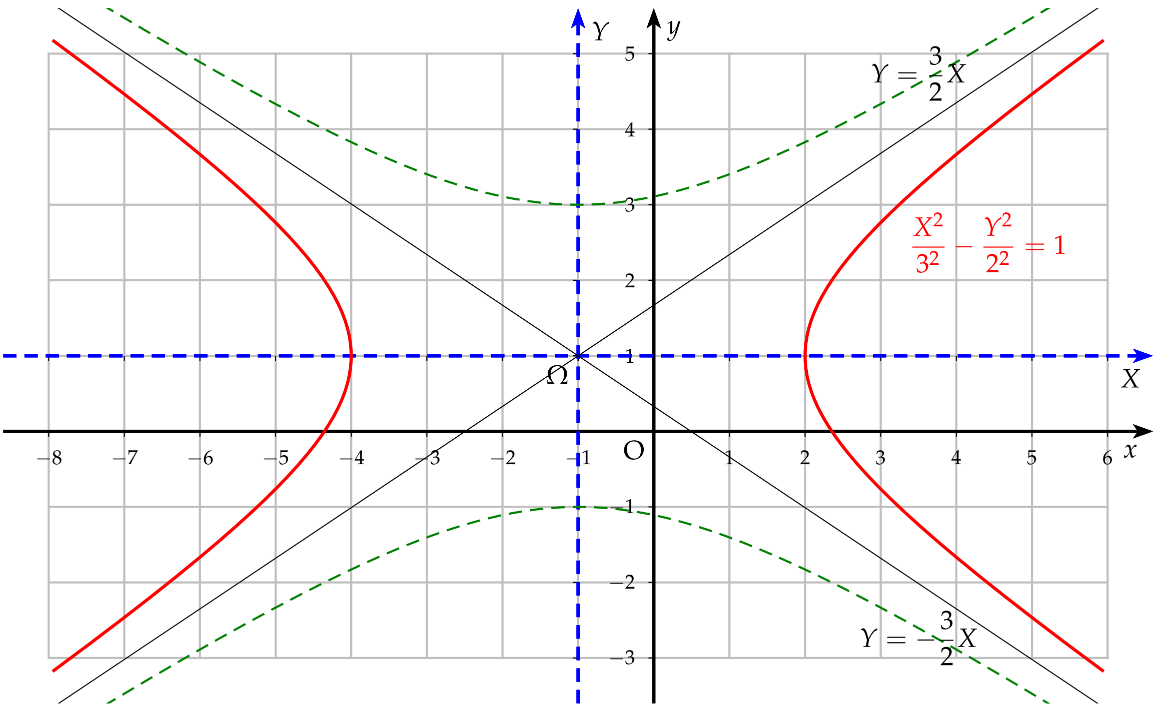


b) On change la forme de l'équation :

$$4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 2y) - 41 = 0$$
$$4(x+1)^2 - 4 - 9(y-1)^2 + 9 - 41 = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 - 9(y-1)^2 = 36$$

On pose alors $\alpha^2 = \dfrac{36}{4} = 9$ et $\beta^2 = \dfrac{36}{9} = 4$ et l'on fait le changement de repère suivant : $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$ et on pose $\Omega(-1\,;1)$

On obtient l'hyperbole $\dfrac{X^2}{3^2} - \dfrac{Y^2}{2^2} = 1$ d'asymptotes $Y = \pm\dfrac{3}{2}X$



Remarque : Si on avait l'équation $\dfrac{X^2}{3^2} - \dfrac{Y^2}{2^2} = -1$ l'hyperbole se situerait dans les deux autres zones délimitées par les asymptotes comme indiquées en pointillé sur le figure ci-dessus.

2 Étude géométrique

2.1 Définition

Définition 2 : Soit F un point fixe, $\mathscr{D}$ une droite fixe et e un réel strictement positif ($F \notin \mathscr{D}$). Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
Une conique de **foyer F** est alors l'ensemble des points M vérifiant $\dfrac{MF}{MH} = e$

e est appelé l'**excentricité** et $\mathscr{D}$ la **directrice** de la conique.

La perpendiculaire Δ à $\mathscr{D}$ passant par le foyer F est appelé **axe focal** de la conique.

Remarque :

- On ne retrouve pas toutes les coniques définies analytiquement mais seulement les **coniques propres** c'est à dire la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. Quand e tend vers 0, la conique se rapproche d'un cercle et quand e tend vers $+\infty$, la conique se rapproche de sa directrice.
- Toutes les coniques ainsi définies sont symétriques par rapport à leur axe focal.

2.2 Construction d'une conique

On distinguera deux cas : $e = 1$ et $e \neq 1$

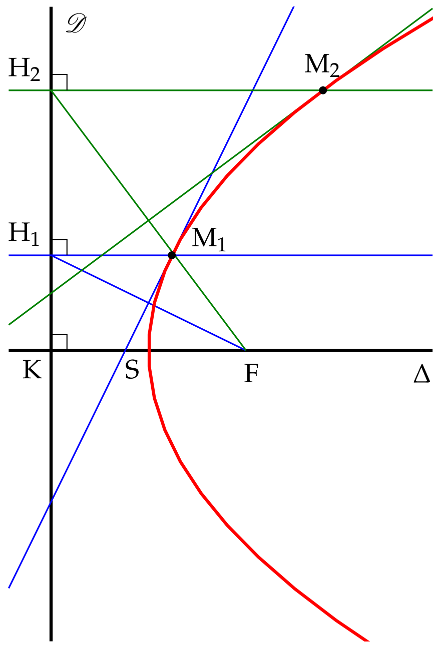
a) $e = 1$ donc $MF = MH$.

Méthode

On prend un point H sur la directrice $\mathscr{D}$ de la conique, M est alors l'intersection de la médiatrice de [FH] et de la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par H. Si H est en K le point M est alors en $S = m[KF]$.

En faisant varier H sur $\mathscr{D}$, on obtient une parabole de sommet S

Sur la figure ci-contre, on a tracer deux points M_1 et M_2 de la parabole.



b) $e \neq 1$ donc $MF = e\,MH$

Méthode

On élève au carré : $MF^2 - e^2\,MH^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{MF} - e\,\overrightarrow{MH}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MF} + e\,\overrightarrow{MH}\right) = 0$

On introduit alors les barycentres I et J respectivement associés aux points pondérés $(F\,;1)\,;(H\,;e)$ et $(F\,;1)\,;(H\,;-e)$.

On a alors $(1-e)\overrightarrow{MI} \cdot (1+e)\overrightarrow{MJ} = 0$ donc $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MJ}}$ sont perpendiculaires donc M appartient au cercle de diamètre [IJ].

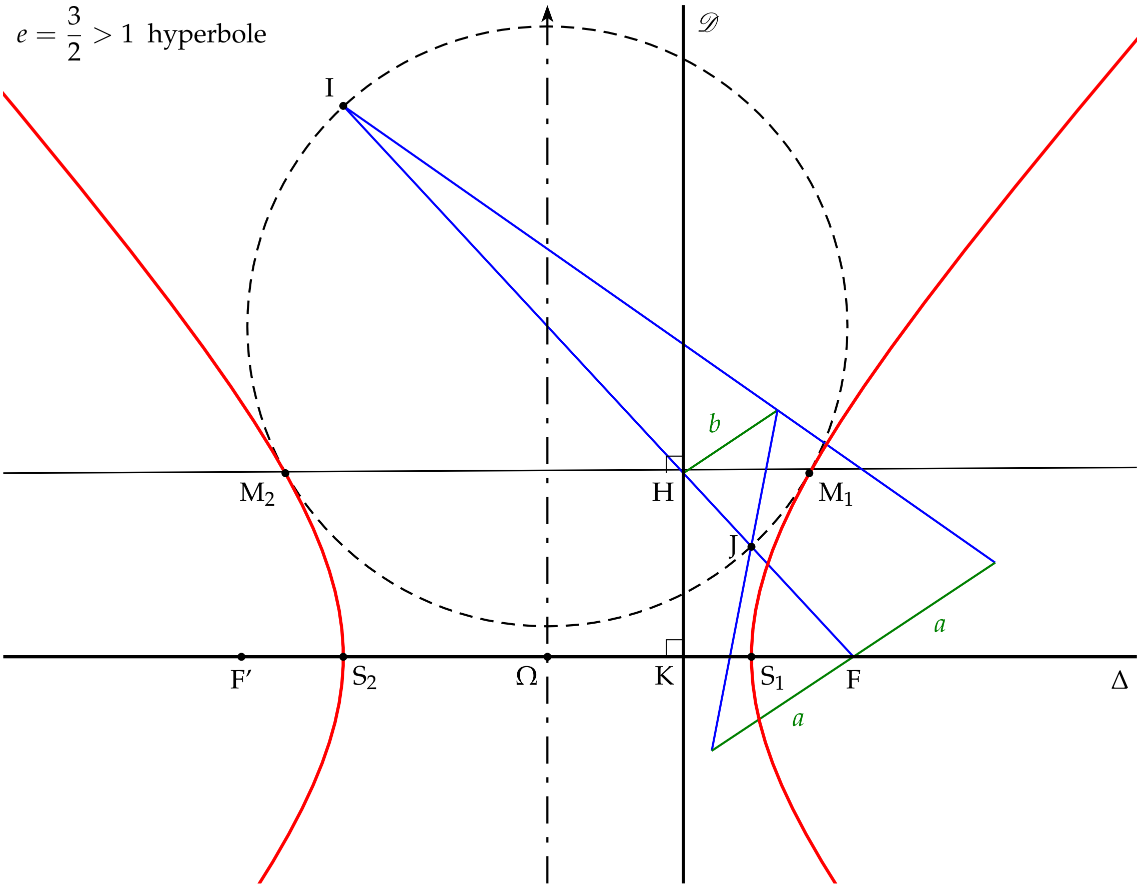
M est donc l'intersection de la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par H et du cercle de diamètre [IJ]. On obtient donc deux points M : M_1 et M_2. Lorsque H est en K, on obtient les sommets S_1 et S_2.

Pour déterminer les barycentres I et J, on pose $e = \dfrac{a}{b}$.
Sur deux droites parallèles menées en F et H, on porte respectivement les longueurs a et b. La construction de I et J découle du théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{IH}} = \frac{\mathrm{JF}}{\mathrm{JH}} = \frac{a}{b}$$

L'ensemble des points M est alors soit une ellipse si $e < 1$ ou une hyperbole si $e > 1$ (comme sur la figure ci-dessous).

Le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole est $\Omega = m[\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2]$. On observe un deuxième foyer F′ symétrique de F par rapport à Ω.



Remarque : On remarque que l'ellipse comme l'hyperbole possède, en plus de l'axe focal, un autre axe de symétrie : la droite parallèle à $\mathscr{D}$ passant par Ω.

2.3 Excentricité et foyers

Théorème 3 : On appelle p la distance de F à la directrice $\mathscr{D}$. Suivant les valeurs de l'excentricité e, on obtient les coniques suivantes :

1) Si $e = 1$ la conique est une parabole d'équation $Y^2 = 2pX$ dans le repère $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. S étant le sommet de la parabole.

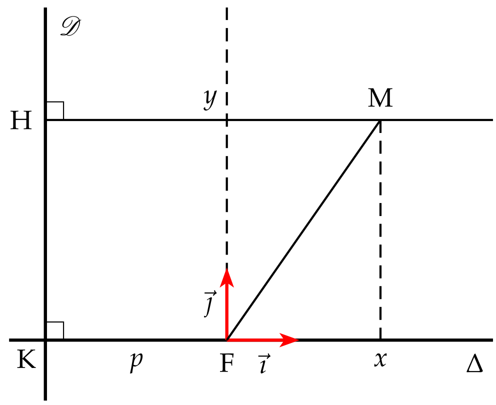
2) Si $e \neq 1$ La conique possède un centre Ω, un deuxième foyer F′, symétrique de F par rapport à Ω. Son expression dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est de la forme :
   - si $e < 1$ $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. La conique est alors une ellipse.
   - si $e > 1$ $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. La conique est alors une hyperbole.

   On a $a^2 = \dfrac{e^2 p}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \dfrac{e^2 p}{|1-e^2|}$

Démonstration : On se place dans le repère centré en F pointant dans les directions de l'axe focal Δ et de la directrice de la conique $\mathscr{D}$ comme indiquée sur la figure ci-dessous.

On appelle p la distance entre F et la directrice de la conique.

Le point M a comme coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $(\mathrm{F}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



M est sur la conique de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e si, et seulement si :

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = e \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{MF}^2 = e^2\,\mathrm{MH}^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + y^2 = e^2(x+p)^2$$

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2px - e^2p^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (1-e^2)x^2 + y^2 - 2e^2px - e^2p^2 = 0$$

1) Si $e = 1$ l'équation devient :

$$y^2 - 2px - p^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y^2 = 2px + p^2 \quad\Leftrightarrow\quad y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

On pose $\mathrm{S}\left(-\dfrac{p}{2}\,;\,0\right)$ et $\begin{cases} X = x + \dfrac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}$

Dans le repère $(\mathrm{S}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation devient : $Y^2 = 2pX$

On reconnaît une parabole d'axe Δ et de sommet S.

2) Si $e \neq 1$ l'équation devient :

$$\begin{aligned}
(1-e^2)x^2 + y^2 - 2e^2px - e^2p^2 &= 0\\
(1-e^2)\left(x^2 - \frac{2e^2p}{1-e^2}\,x\right) + y^2 &= e^2p^2\\
(1-e^2)\left(x - \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 - \frac{e^4p^2}{1-e^2} + y^2 &= e^2p^2\\
(1-e^2)\left(x - \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 + y^2 &= \frac{e^4p^2}{1-e^2} + e^2p^2\\
(1-e^2)\left(x - \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 + y^2 &= \frac{e^4p^2 + e^2p^2 - e^4p^2}{1-e^2}\\
(1-e^2)\left(x - \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 + y^2 &= \frac{e^2p^2}{1-e^2}
\end{aligned}$$

On pose $\Omega\left(\dfrac{e^2p}{1-e^2}\,;0\right)$ et $\begin{cases} X = x - \dfrac{e^2p}{1-e^2} \\ Y = y \end{cases}$

Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation devient : $(1-e^2)X^2 + Y^2 = \dfrac{e^2p}{1-e^2}$

soit : $\dfrac{X^2}{\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}} + \dfrac{Y^2}{\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}} = 1 \quad \text{(a)}$

Tout dépend du signe de $\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$ donc de $1-e^2$

- Si $1-e^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; e < 1$, on pose :
  $a^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$ (a) devient : $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$
  On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre Ω et d'axes de symétrie (ΩX) et (ΩY).
- Si $1-e^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; e > 1$, on pose :
  $a^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = -\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$ (a) devient : $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$
  On reconnaît l'équation d'une hyperbole de centre Ω et d'axes de symétrie (ΩX) et (ΩY).

2.4 Éléments caractéristiques

2.4.1 Parabole

Déterminer les éléments caractéristiques de la parabole suivantes :

$$y^2 - 3x - 4y - 2 = 0$$

On cherche le sommet S de la parabole.

$$y^2 - 3x - 4y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 - 4 - 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = 3(x+2)$$

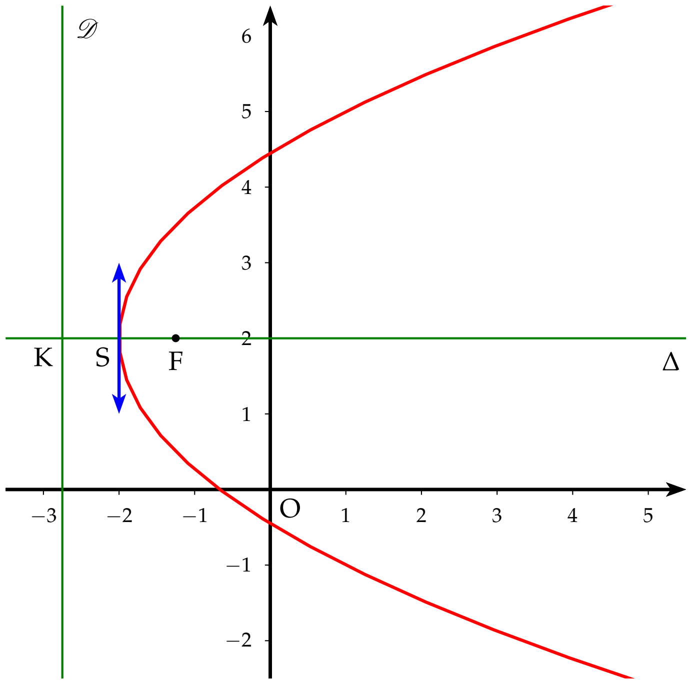
On obtient $\mathrm{S}(-2;2)$, et le changement de variable $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y-2 \end{cases}$

L'équation devient : $Y^2 = 3X$ d'où $3 = 2p \Leftrightarrow p = \dfrac{3}{2}$

Comme S est le milieu de [KF] on a :

$$\mathrm{K} = \left(x_\mathrm{S} - \frac{p}{2}\,;\, y_\mathrm{S}\right) = \left(-\frac{11}{4}\,;\, 2\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{F} = \left(x_\mathrm{S} + \frac{p}{2}\,;\, y_\mathrm{S}\right) = \left(-\frac{5}{4}\,;\, 2\right)$$

On obtient la parabole suivante :



2.4.2 Ellipse

Théorème 4 : Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sous la forme :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a^2 > b^2$$

alors la conique est une ellipse.

Si on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{et} \quad \Omega\mathrm{F} = c$$

Démonstration : Nous avons vu au *1.3* que toute équation du second degré se mettant sous la forme : $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2}$ était une ellipse. De plus si le foyer F se trouve sur l'axe des abscisses, le grand axe de l'ellipse se trouve sur les abscisses et donc $a^2 > b^2$.

Nous avons vu au 2.3 que $a^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$ donc $\dfrac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$

On a alors :

- $e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ en posant $c^2 = a^2 - b^2$ on obtient $e^2 = \dfrac{c^2}{a^2}$ soit $e = \dfrac{c}{a}$
- $b^2 = \dfrac{e^2p^2}{1-e^2} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \dfrac{b^2(1-e^2)}{e^2} = \dfrac{b^2 \times \dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{c^2}{a^2}} = \dfrac{b^4}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad p = \dfrac{b^2}{c}$
- $\Omega\text{F} = \dfrac{e^2p}{1-e^2} = \dfrac{b^2}{p} = b^2 \times \dfrac{c}{b^2} = c$

Exemple : Déterminer les éléments caractéristiques de la conique :

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 25 = 0$$

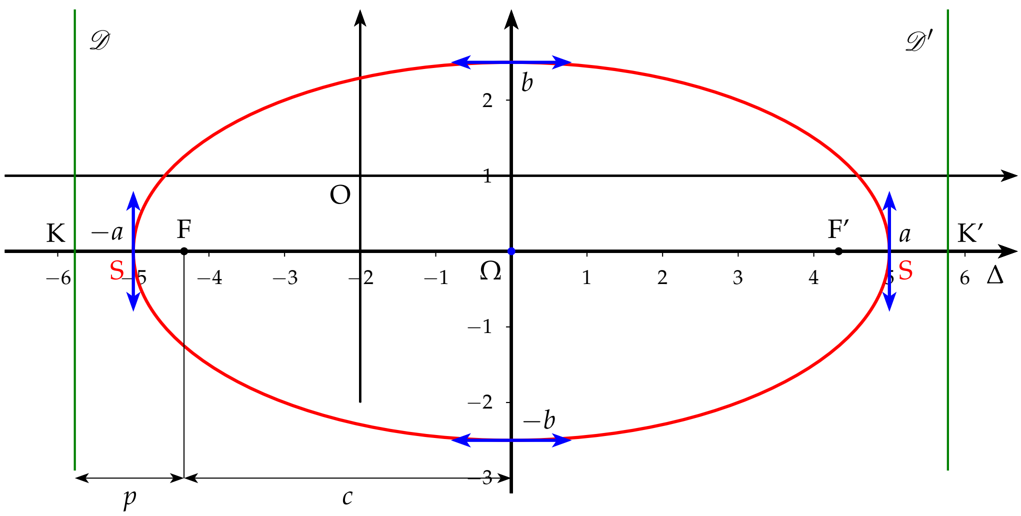
On pose : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$ donc $\Omega(2\,;\,-1)$

On obtient alors : $X^2 + 4Y^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{X^2}{5^2} + \dfrac{Y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$

La conique est donc une ellipse avec $a = 5$ et $b = \dfrac{5}{2}$

On a : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{75}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$p = \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{\dfrac{25}{4}}{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$, $\Omega\text{F} = c = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$



2.4.3 Hyperbole

Théorème 5 : Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sous la forme :
$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$
alors la conique est une hyperbole.

Si on pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :
$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{et} \quad \Omega\text{F} = c$$
Les asymptotes ont pour équations : $Y = \dfrac{b}{a}X$ et $Y = -\dfrac{b}{a}X$

Démonstration : Nous avons vu au *1.3* que toute équation du second degré se mettant sous la forme : $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2}$ était une hyperbole.

Nous avons vu au *2.3* que $a^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \dfrac{e^2p^2}{e^2-1}$ donc $\dfrac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$

On a alors :

- $e^2 = 1 + \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2}$ en posant $c^2 = a^2 + b^2$ on obtient $e^2 = \dfrac{c^2}{a^2}$ soit $e = \dfrac{c}{a}$
- $b^2 = \dfrac{e^2p^2}{e^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \dfrac{b^2(e^2-1)}{e^2} = \dfrac{b^2 \times \dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{c^2}{a^2}} = \dfrac{b^4}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad p = \dfrac{b^2}{c}$
- $\Omega\text{F} = \dfrac{e^2p}{e^2-1} = \dfrac{b^2}{p} = b^2 \times \dfrac{c}{b^2} = c$

Exemple : Déterminer les éléments caractéristiques de la conique :
$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$$

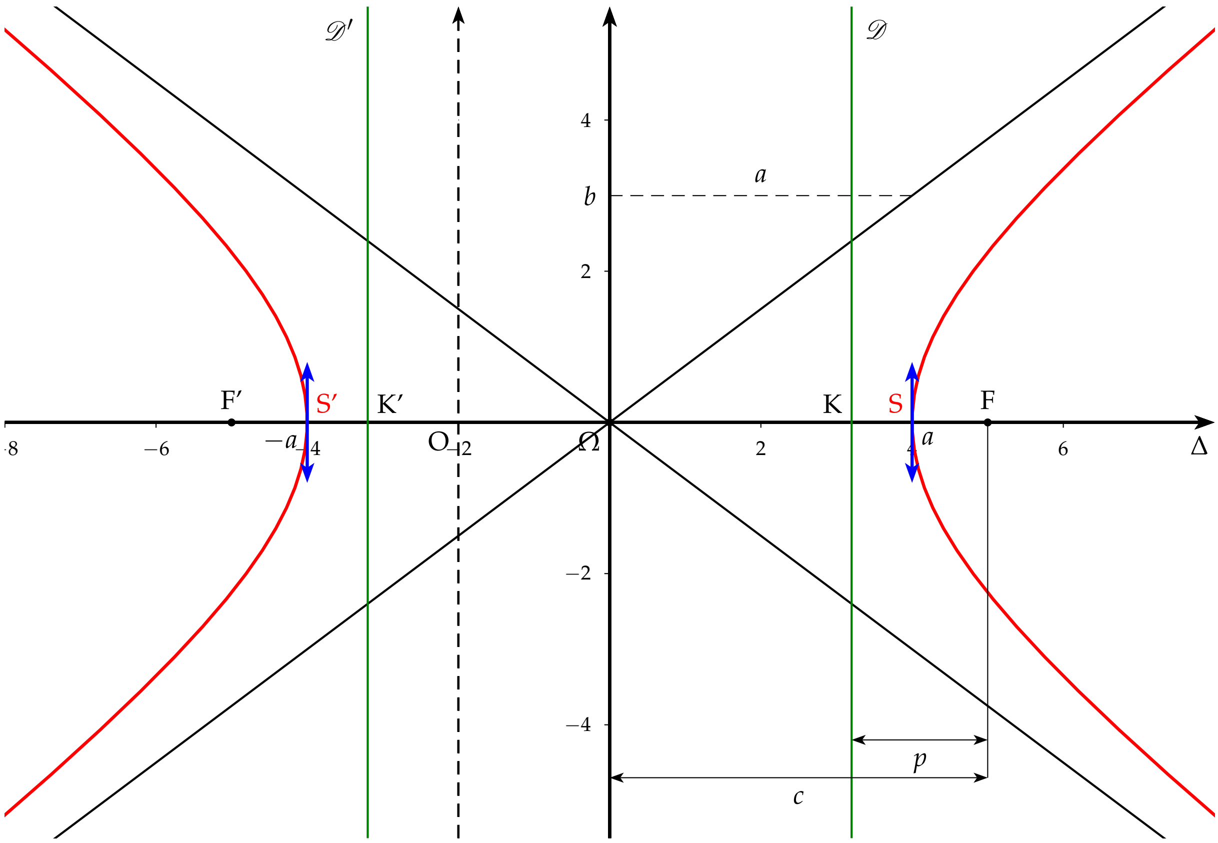
On pose : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \end{cases}$ donc $\Omega(2\,;0)$

On obtient alors : $\dfrac{X^2}{16} - \dfrac{Y^2}{9} = 1$

La conique est donc une hyperbole avec $a = 4$ et $b = 3$

On a : $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = 5 \quad , \quad e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

$p = \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{9}{5} \quad , \quad \Omega\text{F} = c = 5$ et les asymptotes d'équations $Y = \pm\dfrac{3}{4}$



2.5 Définition bifocale d'une ellipse et d'une hyperbole

Théorème 6 : On a les relations suivantes :

- La somme des distances d'un point M d'une ellipse à ses deux foyers F et F′ est égale à la longueur de son grand axe.

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = 2a$$

  Réciproquement tout point M dont la somme des distances à deux points fixes F et F′ est constante appartient à une ellipse de foyers F et F′

- La différence des distances d'un point M d'une hyperbole à ses deux foyers F et F′ est égale à la longueur entre ses deux sommets.

$$|\mathrm{MF} - \mathrm{MF'}| = 2a$$

  Réciproquement tout point M dont la différence des distances à deux points fixes F et F′ est constante appartient à une hyperbole de foyers F et F′

Démonstration :

- Pour l'ellipse on a : $\dfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = e$ avec $c^2 = a^2 - b^2$

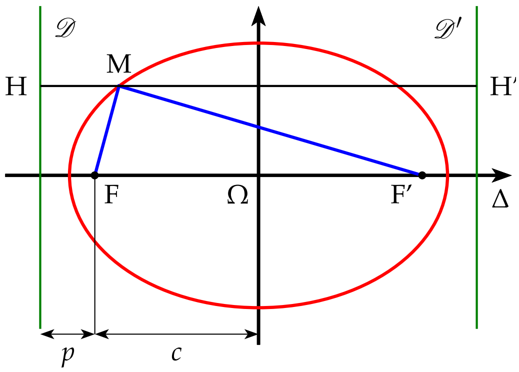
  On a alors : $\mathrm{MF} = e\,\mathrm{MH}$ et $\mathrm{MF'} = e\,\mathrm{MH'}$ donc $\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = e\,(\mathrm{MH} + \mathrm{MH'})$

  or $\mathrm{MH} + \mathrm{MH'} = \mathrm{HH'} = 2(p + c) = 2\left(\dfrac{b^2}{c} + c\right) = 2\left(\dfrac{b^2 + c^2}{c}\right) = \dfrac{2a^2}{c}$

D'où
$\text{MF} + \text{MF}' = e \times \dfrac{2a^2}{c} = \dfrac{c}{a} \times \dfrac{2a^2}{c} = 2a$

La réciproque est admise.

Remarque : Un façon de tracer une ellipse est d'attacher une ficelle à 2 points puis en tendant la ficelle faire parcourir un stylo le long de celle-ci.



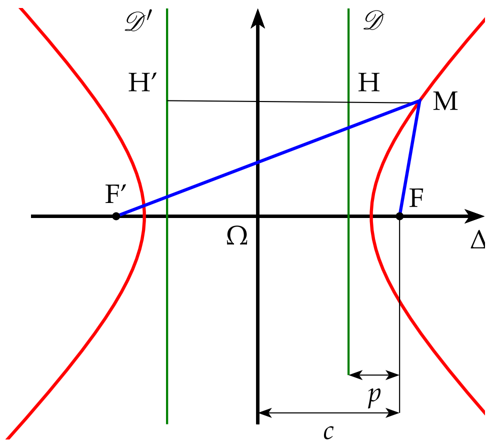
- Pour l'hyperbole on a : $\dfrac{\text{MF}}{\text{MH}} = e$ avec $c^2 = a^2 + b^2$

On a alors :
MF = e MH et MF′ = e MH′ donc $|\text{MF} - \text{MF}'| = e\,|\text{MH} - \text{MH}'|$

or
$$|\text{MH} - \text{MH}'| = \text{HH}' = 2(c-p) = 2\left(c - \frac{b^2}{c}\right) = 2\left(\frac{c^2-b^2}{c}\right) = \frac{2a^2}{c}$$

D'où
$|\text{MF} - \text{MF}'| = e \times \dfrac{2a^2}{c} = \dfrac{c}{a} \times \dfrac{2a^2}{c} = 2a$

La réciproque est admise.



3 Équation paramétrique d'une conique

3.1 Paramétrage d'une ellipse

Théorème 7 : Une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(\Omega\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ a pour représentation paramétrique :

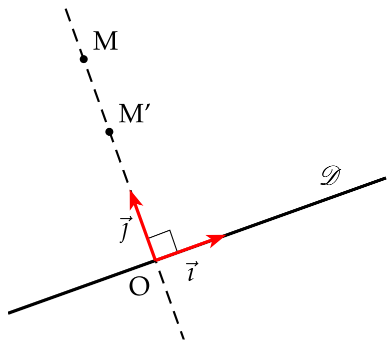
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in [0\,;2\pi[$$

3.2 Affinité orthogonale

Définition 3 : Soit $\mathscr{D}$ une droite, on appelle **affinité orthogonale** d'axe $\mathscr{D}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, l'application affine f qui à tout point M fait correspondre le point M′ tel que $\overrightarrow{\text{OM}'} = k\overrightarrow{\text{OM}}$ où O est la projection orthogonale de M sur $\mathscr{D}$.

On a le schéma suivant avec un rapport k compris entre 0 et 1.
La matrice associée à l'application f dans le repère orthonormée $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

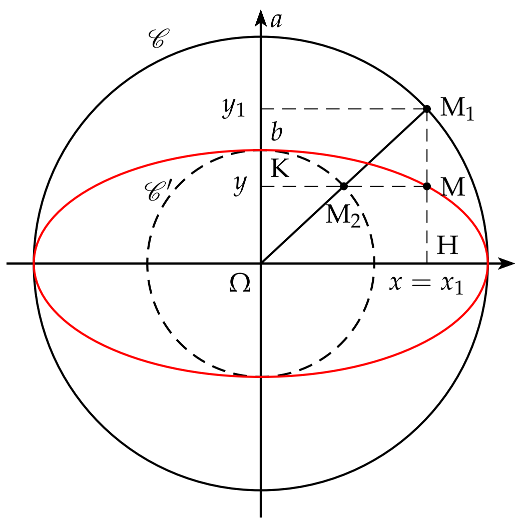


Théorème 8 : Dans le repère orthonormé $(\Omega; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, soit

- le cercle $\mathscr{C}$ de rayon a
- l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$

On passe du cercle $\mathscr{C}$ à l'ellipse $\mathscr{E}$ par une affinité orthogonale d'axe (Ωx) et de rapport $\dfrac{b}{a}$.

Construction :
Pour déterminer un point M de l'ellipse à partir d'un point M_1 du cercle $\mathscr{C}$, on détermine le point M_2, intersection du cercle $\mathscr{C}'$ de rayon b avec $[\Omega M_1]$. Le point M est alors l'intersection des droites (M_1H) et (M_2K).



Démonstration : On revient à la représentation paramétrique des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de raton respectifs a et b.

$$\mathscr{C} \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \qquad \mathscr{C}' \quad \begin{cases} x = b\cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

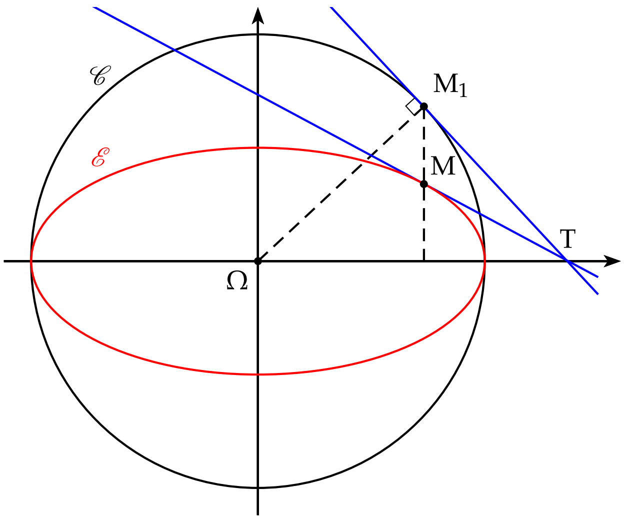
Comme l'abscisse de M est la projection orthogonale de M_1 sur (Ox) et l'ordonnée de M la projection orthogonale de M_2 sur (Oy), les coordonnées du point M sont :
$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ qui correspond à la représentation paramétrique de l'ellipse $\mathscr{E}$.

De plus $\dfrac{y}{y_1} = \dfrac{b \sin t}{a \sin t} = \dfrac{b}{a}$. On passe donc du cercle $\mathscr{C}$ à l'ellipse $\mathscr{E}$ par une affinité orthogonale d'axe (Ωx) et de rapport $\dfrac{b}{a}$.

Remarque : Un ellipse est donc le représentation d'un cercle dans un repère orthogonal non normé.

Théorème 9 : Les tangentes d'un point du cercle $\mathscr{C}$ et du point M correspondant à l'ellipse $\mathscr{E}$ sont sécantes à l'axe (Ωx) au même point T

Démonstration :



On revient à la représentation paramétrique de l'ellipse $\mathscr{E}$

$$\overrightarrow{\Omega M} \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{on dérive} \quad \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\Omega M}}{\mathrm{d}\,t} \begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = b\cos t \end{cases}$$

Le coefficient directeur de la tangente en T, point d'intersection de l'ellipse $\mathscr{E}$ avec l'axe des abscisses :

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y_T - y}{x_T - x} \Leftrightarrow \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{0 - b\sin t}{x_T - a\cos t} \Leftrightarrow x_T - a\cos t = \frac{ab\sin^2 t}{b\cos t} \Leftrightarrow$$
$$x_T = \frac{a\sin^2 t}{\cos t} + a\cos t = \frac{a}{\cos t}$$

Pour le cercle $\mathscr{C}$: $\overrightarrow{\Omega M_1} \begin{cases} x_1 = a\cos t \\ y_1 = a\sin t \end{cases}$ on dérive $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\Omega M_1}}{\mathrm{d}\,t} \begin{cases} x_1' = -a\sin t \\ y_1' = a\cos t \end{cases}$

Le coefficient directeur de la tangente en T_1, point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses :

$$\frac{y_1'}{x_1'} = \frac{y_{T_1} - y_1}{x_{T_1} - x_1} \Leftrightarrow \frac{a\cos t}{-a\sin t} = \frac{0 - a\sin t}{x_{T_1} - a\cos t} \Leftrightarrow x_{T_1} - a\cos t = \frac{a\sin^2 t}{\cos t} \Leftrightarrow$$
$$x_{T_1} = \frac{a\sin^2 t}{\cos t} + a\cos t = \frac{a}{\cos t}$$

On a bien : $x_T = x_{T_1}$

Remarque : Pour construire la tangente en M, on trace la perpendiculaire en M_1 qui coupe l'axe des abscisses en T. On trace ensuite la droite (TM) qui correspond à la tangente en M

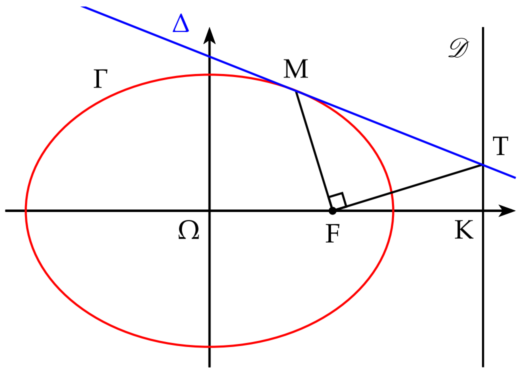
3.3 Construction de la tangente à une conique

Théorème 10 : Soit Γ une conique de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$. La tangente Δ à Γ en tout point M de Γ qui n'appartient pas à l'axe focal coupe $\mathscr{D}$ en un point T tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{FM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FT}} = 0$$

Remarque : On fera la démonstration avec l'ellipse, la démonstration avec l'hyperbole est identique.

Soit le point $\mathrm{M}(x_0; y_0)$ de Γ, ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



D'après 2.4.2 on a $\mathrm{OK} = \dfrac{a^2}{c}$ et $\mathrm{OF} = c$.

On isole y^2 : $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$

On dérive par rapport à x en x_0, on a :

$$2y'_0\, y_0 = -\frac{2b^2}{a^2}\, x_0 \quad \Leftrightarrow \quad y'_0 = -\frac{b^2\, x_0}{a^2\, y_0}$$

L'équation de la tangente en M : $y = y'_0(x - x_0) + y_0$

On remplace :

$$y - y_0 = -\frac{b^2\, x_0}{a^2\, y_0}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad a^2\, y_0\, y - a^2\, y_0^2 = -b^2\, x_0\, x + b^2\, x_0^2$$

$$b^2\, x_0\, x + a^2\, y_0\, y = b^2\, x_0^2 + a^2\, y_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0\, x}{a^2} + \frac{y_0\, y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

or M appartient à l'ellipse Γ donc : $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$. on a alors :

$$\frac{x_0\, x}{a^2} + \frac{y_0\, y}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0\, x}{a^2}\right)$$

En T, on a : $x_{\mathrm{T}} = \dfrac{a^2}{c}$ donc $y_{\mathrm{T}} = \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 - \dfrac{x_0}{c}\right)$

Les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{\mathrm{FM}} = \begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FT}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2}{c} - c \\ \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 - \dfrac{x_0}{c}\right) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{FM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FT}} &= (x_0 - c)\left(\frac{a^2}{c} - c\right) + b^2\left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \\ &= \frac{a^2 - c^2}{c}(x_0 - c) + \frac{b^2}{c}(c - x_0) = 0 \quad \text{car} \quad a^2 - c^2 = b^2 \end{aligned}$$

3.4 Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Théorème 11 : Soit l'hyperbole Γ d'équation dans le repère orthonormé $(\Omega\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

L'hyperbole Γ dans le repère normé centré en Ω et dirigé vers ses deux asymptotes $(\Omega\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\,)$ a pour équation :

$$XY=\frac{c^2}{4}$$

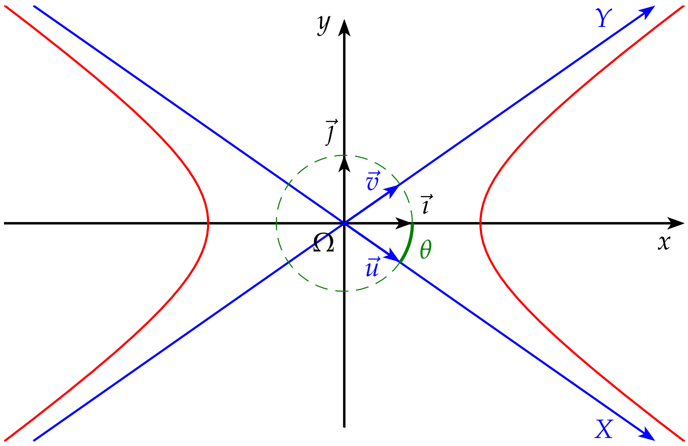
Dans $(\Omega\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$

$\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Asymptotes : $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

$c^2=a^2+b^2$

$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ donc $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\tan\theta}$



Démonstration :

On a : $\begin{cases}\vec{u}=\cos\theta\,\vec{\imath}-\sin\theta\,\vec{\jmath}\\ \vec{v}=\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath}\end{cases}$ donc $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \cos\theta\\ -\sin\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$

On obtient alors : $\begin{cases}x=\cos\theta(X+Y)\\ y=\sin\theta(Y-X)\end{cases}$

L'équation de Γ : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad\Leftrightarrow\quad (\times a^2)\quad x^2-\dfrac{a^2}{b^2}y^2=a^2$

On remplace en fonction de X et Y :

$$\cos^2\theta(X+Y)^2-\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}(Y-X)^2=a^2$$

$$\cos^2\theta(X+Y)^2-\cos^2\theta(Y-X)^2=a^2$$

$$\cos^2\theta\left[(X+Y)^2-(Y-X)^2\right]=a^2$$

$$\cos^2\theta\times 4XY=a^2\quad\Rightarrow\quad XY=\frac{a^2}{4\cos^2\theta}$$

Or $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}$

L'équation de Γ dans $(\Omega\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\,)$ est donc : $XY=\dfrac{c^2}{4}$

Remarque :

Une hyperbole est équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires.

On a alors $a = b$ donc $c^2 = 2a^2$. L'équation de Γ vaut : $XY = \dfrac{a^2}{2}$

C'est cette hyperbole qui est la représentation des fonctions homographiques :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$