

Les coniques

Table des matières

1	Étude analytique	2
1.1	Définition	2
1.2	Coniques dépourvues de centre	2
1.3	Coniques à centre	4
2	Étude géométrique	7
2.1	Définition	7
2.2	Construction d'une conique	7
2.3	Excentricité et foyers	9
2.4	Éléments caractéristiques	10
2.4.1	Parabole	10
2.4.2	Ellipse	11
2.4.3	Hyperbole	13
2.5	Définition bifocale d'une ellipse et d'une hyperbole	14
3	Équation paramétrique d'une conique	15
3.1	Paramétrage d'une ellipse	15
3.2	Affinité orthogonale	15
3.3	Construction de la tangente à une conique	18
3.4	Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes	19

1 Étude analytique

1.1 Définition

Définition 1 : On appelle conique les courbes du second degré c'est à dire les courbes dont les points $M(x, y)$, dans un repère orthonormé, vérifient l'équation implicite suivante :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad \text{avec} \quad |a| + |b| \neq 0$$

Les coefficients a, b, c, d et e étant réels

Remarque :

- Les coniques doivent leur nom à la section d'un cône par un plan. Les grecs leur avaient donné comme nom : ellipse, hyperbole, parabole.
- La condition $|a| + |b| \neq 0$ signifie que les coefficients a et b ne peuvent être nuls en même temps ce qui marque le second degré.

1.2 Coniques dépourvues de centre

Théorème 1 : Lorsque le produit $ab = 0$ avec $|a| + |b| \neq 0$, on a si :

- 1) $a = 0$ et $c = 0$ suivant le signe de $\Delta'_1 = d^2 - be$
 - $\Delta'_1 > 0$ **deux droites horizontales** d'équation $y = y_1$ et $y = y_2$
 - $\Delta'_1 = 0$ **une droite horizontale** d'équation $y = y_0$
 - $\Delta'_1 < 0$ aucun point
- 2) $a = 0$ et $c \neq 0$ **une parabole** d'axe parallèle à (Ox) du type $Y^2 = 2pX$
- 3) $b = 0$ et $d = 0$ suivant le signe de $\Delta'_2 = c^2 - ae$
 - $\Delta'_2 > 0$ **deux droites verticales** d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$
 - $\Delta'_2 = 0$ **une droite verticale** d'équation $x = x_0$
 - $\Delta'_2 < 0$ aucun point
- 4) $b = 0$ et $d \neq 0$ **une parabole** d'axe parallèle à (Oy) du type $Y = \alpha X^2$

Démonstration : On détaillera les cas avec $a = 0$. Les cas avec $b = 0$ se démontrent pareillement.

- 1) $a = 0$ et $c = 0$, on obtient alors : $by^2 + 2dy + e = 0$. C'est une équation réduite en y avec x quelconque.
On calcule le discriminant réduit : $\Delta'_1 = d^2 - be$
 - si $\Delta'_1 > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes en y . On obtient alors deux droites horizontales d'équation $y = y_1$ et $y = y_2$

- si $\Delta'_1 = 0$, l'équation admet alors une solution double en y . On obtient alors une droite horizontale d'équation $y = y_0$
- si $\Delta'_1 < 0$, l'équation n'admet pas de solution en y . Il n'y a donc aucun point vérifiant l'équation.

2) $a = 0$ et $c \neq 0$ l'équation devient :

$$\begin{aligned} by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 &\Leftrightarrow b \left[\left(y + \frac{d}{b} \right)^2 - \frac{d^2}{b^2} \right] = -2cx - e \\ \Leftrightarrow b \left(y + \frac{d}{b} \right)^2 = -2cx + \frac{d^2}{b} - e &\Leftrightarrow b \left(y + \frac{d}{b} \right)^2 = -2c \left(x + \frac{d^2 - be}{2bc} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(y + \frac{d}{b} \right)^2 = -\frac{2c}{b} \left(x + \frac{\Delta'_1}{2bc} \right) \end{aligned}$$

On pose alors : $p = -\frac{c}{b}$ et l'on fait le changement de repère suivant :

$$\begin{cases} X = x + \frac{\Delta'_1}{2bc} \\ Y = y + \frac{d}{b} \end{cases} \text{ de nouvelle origine } \Omega \left(-\frac{\Delta'_1}{2bc}; -\frac{d}{b} \right)$$

On obtient la courbe d'équation $Y^2 = 2pX$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

La courbe est donc la réunion des deux demi-parabole d'axe (ΩX) d'équations $Y = \pm\sqrt{2pX}$

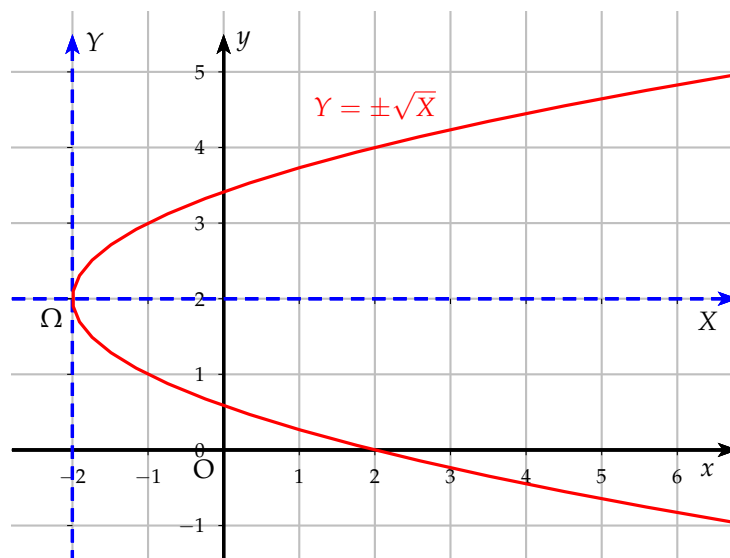
Exemple : Construire la parabole d'équation : $y^2 - x - 4y + 2 = 0$

On change la forme :

$$(y - 2)^2 - 4 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = x + 2$$

On fait le changement de repère suivant $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ et on pose $\Omega(-2; 2)$

On obtient la parabole $Y^2 = X$, décomposée en deux demi-paraboles $Y = \pm\sqrt{X}$



1.3 Coniques à centre

Théorème 2 : Lorsque le produit $ab \neq 0$, la conique possède un centre et son équation peut s'écrire sous la forme :

$$aX^2 + bY^2 = k \quad \text{de centre} \quad \Omega \left(-\frac{c}{a}; -\frac{d}{b} \right)$$

1) $ab > 0$ (par exemple $a > 0$ et $b > 0$)

- $k = 0$ La conique se réduit à **un seul point** Ω .
- $k < 0$ La conique ne possède **aucun point**.
- $k > 0$ La conique est **une ellipse** d'équation du type $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$

2) $ab < 0$

- $k = 0$ La conique est l'union de **deux droites** d'équation $Y = \pm X \sqrt{-\frac{a}{b}}$ symétriques par rapport à (ΩX) et (ΩY)
- $k \neq 0$ La conique est **une hyperbole** d'équation du type $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ d'asymptotes $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} X$

Remarque : Toutes ses coniques possèdent deux axes de symétrie (ΩX) et (ΩY) .

Démonstration : On change la forme de l'équation :

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 &\Leftrightarrow a \left(x^2 + \frac{2c}{a}x \right) + b \left(y^2 + \frac{2d}{b}y \right) + e = 0 \Leftrightarrow \\ a \left[\left(x + \frac{c}{a} \right)^2 + \frac{c^2}{a^2} \right] + b \left[\left(y + \frac{d}{b} \right)^2 + \frac{d^2}{b^2} \right] + e = 0 &\Leftrightarrow \\ a \left(x + \frac{c}{a} \right)^2 + b \left(y + \frac{d}{b} \right)^2 = \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e \end{aligned}$$

On pose alors $k = \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e$ et l'on fait le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} X = x + \frac{c}{a} \\ Y = y + \frac{d}{b} \end{cases} \quad \text{de nouvelle origine} \quad \Omega \left(-\frac{c}{a}; -\frac{d}{b} \right)$$

On obtient alors l'équation : $aX^2 + bY^2 = k$

1) $ab > 0$ (par exemple $a > 0$ et $b > 0$)

- Si $k = 0$ la seule solution de l'équation est $X = 0$ et $Y = 0$, donc la conique se réduit à Ω
- Si $k < 0$ l'équation n'a pas de solution donc la conique ne possède aucun point.

- Si $k > 0$, on divise par k : $\frac{a}{k}X^2 + \frac{b}{k}Y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$

On pose alors comme $a > 0$, $b > 0$ et $k > 0$: $\alpha^2 = \frac{k}{a}$ et $\beta^2 = \frac{k}{b}$

on obtient alors : $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ équation d'une ellipse

Remarque :

α : longueur de demi-axe horizontal de l'ellipse

β : longueur de demi-axe vertical de l'ellipse

si $\alpha = \beta$ l'ellipse est alors un cercle de rayon α .

2) $ab < 0$

- Si $k = 0$ l'équation devient $Y^2 = -\frac{a}{b}X^2 \Leftrightarrow Y = \pm X\sqrt{-\frac{a}{b}}$. la conique est alors la réunion de deux droites.

- Si $k \neq 0$, on divise par k : $\frac{a}{k}X^2 + \frac{b}{k}Y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$

Comme a et b sont de signes contraires deux cas sont envisageables :

- a) $\frac{k}{a} > 0$ et $\frac{k}{b} < 0$, on pose alors : $\alpha^2 = \frac{k}{a}$ et $\beta^2 = -\frac{k}{b}$

l'équation devient alors $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$

- b) $\frac{k}{a} < 0$ et $\frac{k}{b} > 0$, on pose alors : $\alpha^2 = -\frac{k}{a}$ et $\beta^2 = \frac{k}{b}$

l'équation devient alors $-\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = -1$

On obtient alors dans ces deux cas l'équation d'une hyperbole.

Exemples : Construire les courbes suivantes :

a) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$

b) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 0$



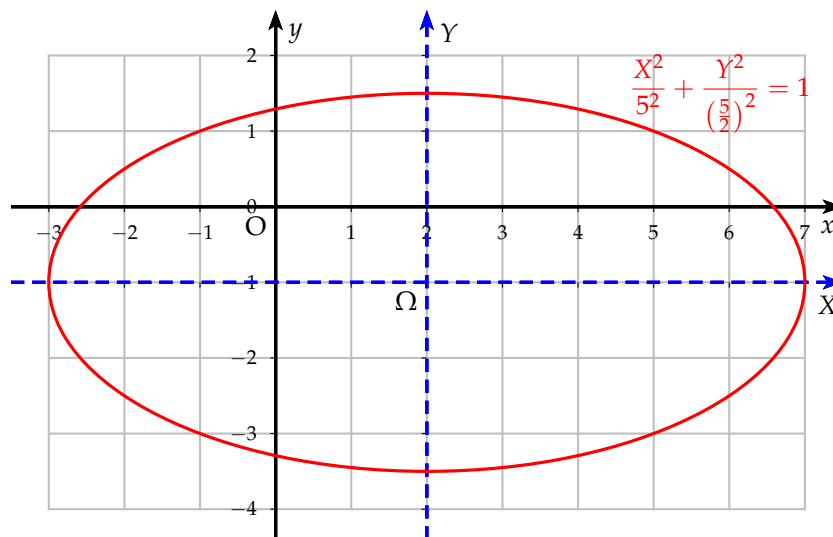
a) On change la forme de l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4(y^2 + 2y) - 17 = 0 \\ (x-2)^2 - 4 + 4(y+1)^2 - 4 - 17 = 0 &\Leftrightarrow (x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 25 \end{aligned}$$

On pose alors $\alpha^2 = 25$ et $\beta^2 = \frac{25}{4}$ et l'on fait le changement de repère

suisant : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$ et on pose $\Omega(2; -1)$

On obtient l'ellipse $\frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$



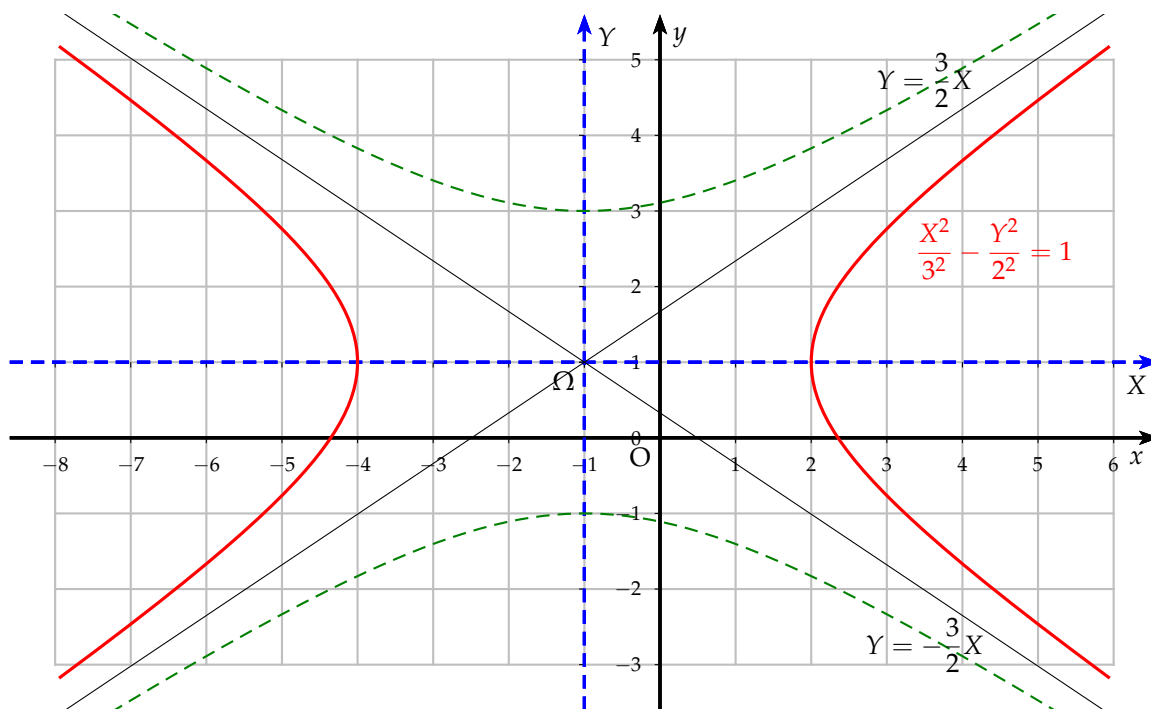
b) On change la forme de l'équation :

$$4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 2y) - 41 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 - 9(y-1)^2 + 9 - 41 = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 - 9(y-1)^2 = 36$$

On pose alors $\alpha^2 = \frac{36}{4} = 9$ et $\beta^2 = \frac{36}{9} = 4$ et l'on fait le changement de repère suivant : $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$ et on pose $\Omega(-1; 1)$

On obtient l'hyperbole $\frac{X^2}{3^2} - \frac{Y^2}{2^2} = 1$ d'asymptotes $Y = \pm \frac{3}{2}X$



Remarque : Si on avait l'équation $\frac{X^2}{3^2} - \frac{Y^2}{2^2} = -1$ l'hyperbole se situerait dans les deux autres zones délimitées par les asymptotes comme indiquées en pointillé sur la figure ci-dessus.

2 Étude géométrique

2.1 Définition

Définition 2 : Soit F un point fixe, \mathcal{D} une droite fixe et e un réel strictement positif ($F \notin \mathcal{D}$). Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .

Une conique de **foyer** F est alors l'ensemble des points M vérifiant $\frac{MF}{MH} = e$

e est appelé l'**excentricité** et \mathcal{D} la **directrice** de la conique.

La perpendiculaire Δ à \mathcal{D} passant par le foyer F est appelé **axe focal** de la conique.

Remarque :

- On ne retrouve pas toutes les coniques définies analytiquement mais seulement les **coniques propres** c'est à dire la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. Quand e tend vers 0, la conique se rapproche d'un cercle et quand e tend vers $+\infty$, la conique se rapproche de sa directrice.
- Toutes les coniques ainsi définies sont symétriques par rapport à leur axe focal.

2.2 Construction d'une conique

On distinguera deux cas : $e = 1$ et $e \neq 1$

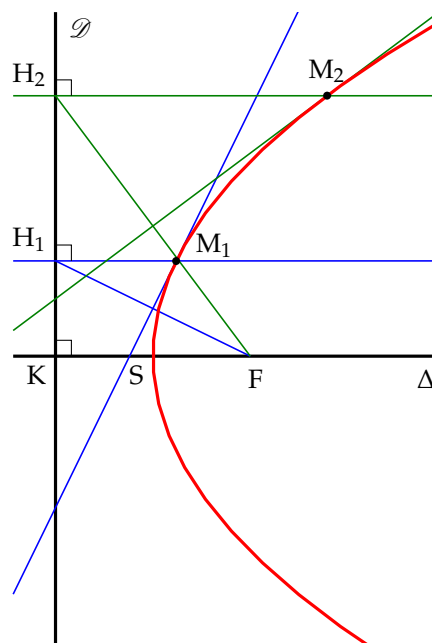
a) $e = 1$ donc $MF = MH$.

Méthode

On prend un point H sur la directrice \mathcal{D} de la conique, M est alors l'intersection de la médiatrice de $[FH]$ et de la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant par H . Si H est en K le point M est alors en $S = m[KF]$.

En faisant varier H sur \mathcal{D} , on obtient une parabole de sommet S

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux points M_1 et M_2 de la parabole.



b) $e \neq 1$ donc $MF = eMH$

Méthode

On élève au carré : $MF^2 - e^2 MH^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MH}) \cdot (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MH}) = 0$

On introduit alors les barycentres I et J respectivement associés aux points pondérés $(F; 1); (H; e)$ et $(F; 1); (H; -e)$.

On a alors $(1 - e)\vec{MI} \cdot (1 + e)\vec{MJ} = 0$ donc $\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$

Les vecteurs \vec{MI} et \vec{MJ} sont perpendiculaires donc M appartient au cercle de diamètre [IJ].

M est donc l'intersection de la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant par H et du cercle de diamètre [IJ]. On obtient donc deux points M : M_1 et M_2 . Lorsque H est en K, on obtient les sommets S_1 et S_2 .

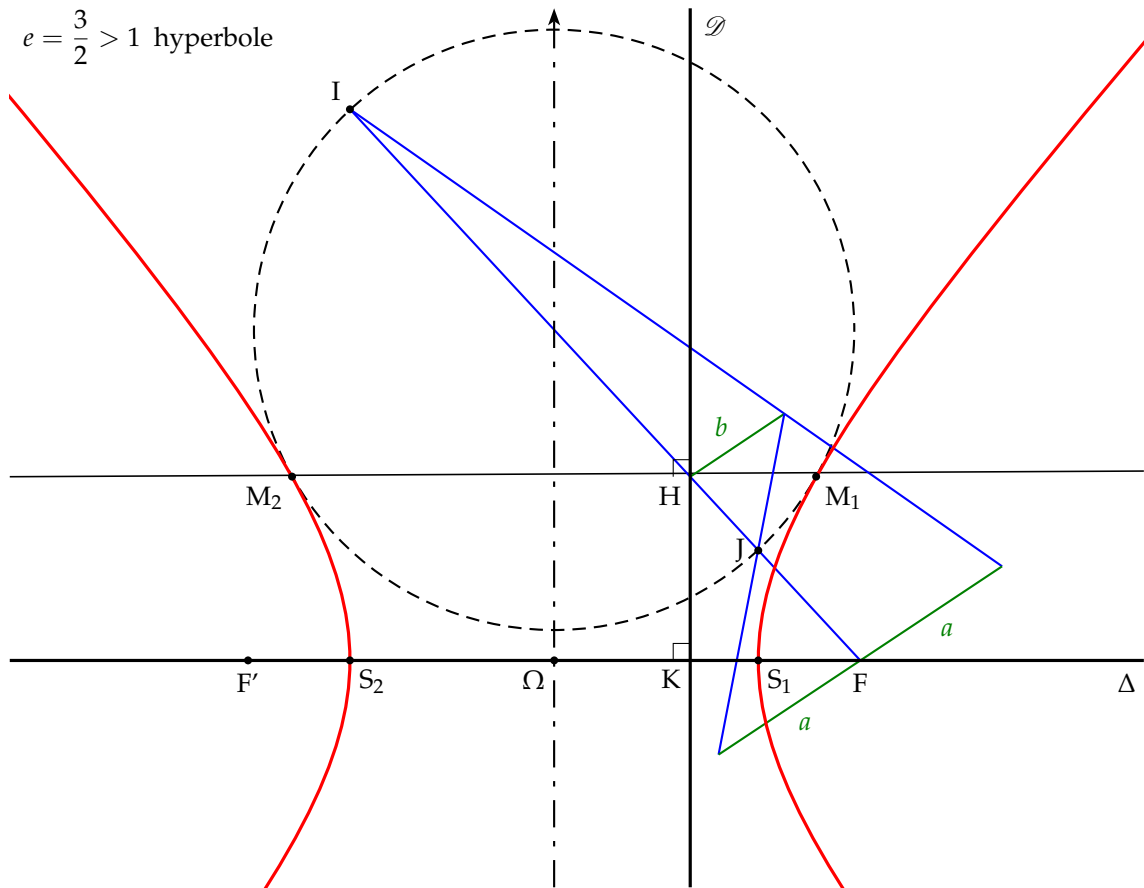
Pour déterminer les barycentres I et J, on pose $e = \frac{a}{b}$.

Sur deux droites parallèles menées en F et H, on porte respectivement les longueurs a et b . La construction de I et J découle du théorème de Thalès :

$$\frac{IF}{IH} = \frac{JF}{JH} = \frac{a}{b}$$

L'ensemble des points M est alors soit une ellipse si $e < 1$ ou une hyperbole si $e > 1$ (comme sur la figure ci-dessous).

Le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole est $\Omega = m[S_1S_2]$. On observe un deuxième foyer F' symétrique de F par rapport à Ω .



Remarque : On remarque que l'ellipse comme l'hyperbole possède, en plus de l'axe focal, un autre axe de symétrie : la droite parallèle à \mathcal{D} passant par Ω .

2.3 Excentricité et foyers

Théorème 3 : On appelle p la distance de F à la directrice \mathcal{D} . Suivant les valeurs de l'excentricité e , on obtient les coniques suivantes :

1) Si $e = 1$ la conique est une parabole d'équation $Y^2 = 2pX$ dans le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) . S étant le sommet de la parabole.

2) Si $e \neq 1$ La conique possède un centre Ω , un deuxième foyer F' , symétrique de F par rapport à Ω . Son expression dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est de la forme :

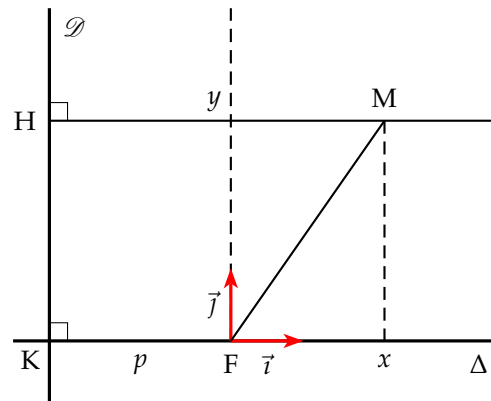
- si $e < 1$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. La conique est alors une ellipse.
- si $e > 1$ $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. La conique est alors une hyperbole.

$$\text{On a } a^2 = \frac{e^2 p}{(1 - e^2)^2} \text{ et } b^2 = \frac{e^2 p}{|1 - e^2|}$$

Démonstration : On se place dans le repère centré en F pointant dans les directions de l'axe focal Δ et de la directrice de la conique \mathcal{D} comme indiquée sur la figure ci-dessous.

On appelle p la distance entre F et la directrice de la conique.

Le point M a comme coordonnées $(x; y)$ dans le repère (F, \vec{i}, \vec{j}) .



M est sur la conique de foyer F , de directrice \mathcal{D} et d'excentricité e si, et seulement si :

$$\frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^2(x + p)^2$$

$$x^2 + y^2 = e^2 x^2 + 2e^2 px - e^2 p^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2 px - e^2 p^2 = 0$$

1) Si $e = 1$ l'équation devient :

$$y^2 - 2px - p^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2px + p^2 \Leftrightarrow y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right)$$

$$\text{On pose } S\left(-\frac{p}{2}; 0\right) \text{ et } \begin{cases} X = x + \frac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}$$

Dans le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) , l'équation devient : $Y^2 = 2pX$

On reconnaît une parabole d'axe Δ et de sommet S .

2) Si $e \neq 1$ l'équation devient :

$$\begin{aligned} (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2px - e^2p^2 &= 0 \\ (1 - e^2) \left(x^2 - \frac{2e^2p}{1 - e^2}x \right) + y^2 &= e^2p^2 \\ (1 - e^2) \left(x - \frac{e^2p}{1 - e^2} \right)^2 - \frac{e^4p^2}{1 - e^2} + y^2 &= e^2p^2 \\ (1 - e^2) \left(x - \frac{e^2p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{e^4p^2}{1 - e^2} + e^2p^2 \\ (1 - e^2) \left(x - \frac{e^2p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{e^4p^2 + e^2p^2 - e^4p^2}{1 - e^2} \\ (1 - e^2) \left(x - \frac{e^2p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{e^2p^2}{1 - e^2} \end{aligned}$$

On pose $\Omega \left(\frac{e^2p}{1 - e^2}; 0 \right)$ et $\begin{cases} X = x - \frac{e^2p}{1 - e^2} \\ Y = y \end{cases}$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation devient : $(1 - e^2)X^2 + Y^2 = \frac{e^2p^2}{1 - e^2}$

soit : $\frac{X^2}{\frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{e^2p^2}{1 - e^2}} = 1$ (a)

Tout dépend du signe de $\frac{e^2p^2}{1 - e^2}$ donc de $1 - e^2$

- Si $1 - e^2 > 0 \Leftrightarrow e < 1$, on pose :

$$a^2 = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} \text{ et } b^2 = \frac{e^2p^2}{1 - e^2} \quad \text{(a) devient : } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre Ω et d'axes de symétrie (ΩX) et (ΩY) .

- Si $1 - e^2 < 0 \Leftrightarrow e > 1$, on pose :

$$a^2 = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} \text{ et } b^2 = -\frac{e^2p^2}{1 - e^2} \quad \text{(a) devient : } \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole de centre Ω et d'axes de symétrie (ΩX) et (ΩY) .

2.4 Éléments caractéristiques

2.4.1 Parabole

Déterminer les éléments caractéristiques de la parabole suivantes :

$$y^2 - 3x - 4y - 2 = 0$$



On cherche le sommet S de la parabole.

$$y^2 - 3x - 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 - 4 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 3(x + 2)$$

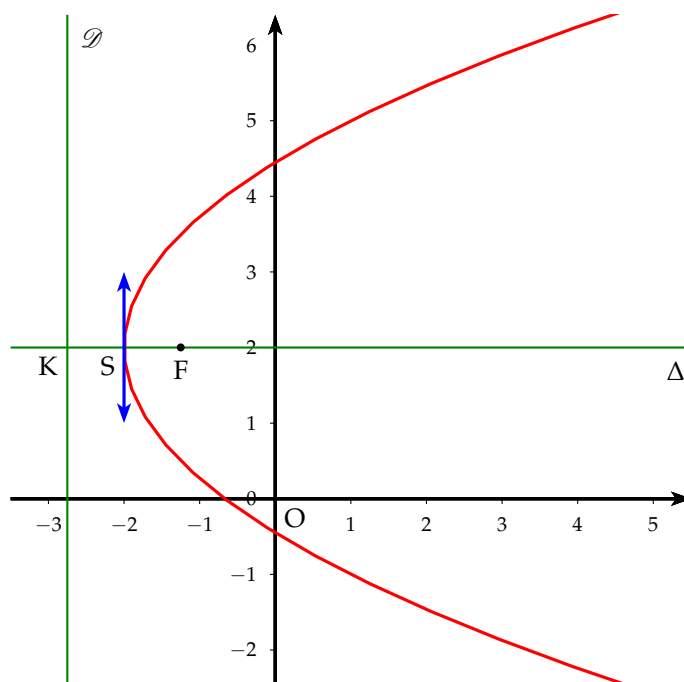
On obtient $S(-2; 2)$, et le changement de variable $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

L'équation devient : $Y^2 = 3X$ d'où $3 = 2p \Leftrightarrow p = \frac{3}{2}$

Comme S est le milieu de [KF] on a :

$$K = \left(x_S - \frac{p}{2}; y_S\right) = \left(-\frac{11}{4}; 2\right) \quad \text{et} \quad F = \left(x_S + \frac{p}{2}; y_S\right) = \left(-\frac{5}{4}; 2\right)$$

On obtient la parabole suivante :



2.4.2 Ellipse

Théorème 4 : Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sous la forme :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a^2 > b^2$$

alors la conique est une ellipse.

Si on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{et} \quad \Omega F = c$$

Démonstration : Nous avons vu au 1.3 que toute équation du second degré se mettant sous la forme : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$ était une ellipse. De plus si le foyer F se trouve

sur l'axe des abscisses, le grand axe de l'ellipse se trouve sur les abscisses et donc $a^2 > b^2$.

Nous avons vu au 2.3 que $a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2}$ et $b^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2}$ donc $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$

On a alors :

- $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ en posant $c^2 = a^2 - b^2$ on obtient $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ soit $e = \frac{c}{a}$
- $b^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2(1 - e^2)}{e^2} = \frac{b^2 \times \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$
- $\Omega F = \frac{e^2 p}{1 - e^2} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$

Exemple : Déterminer les éléments caractéristiques de la conique :

$$(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 - 25 = 0$$



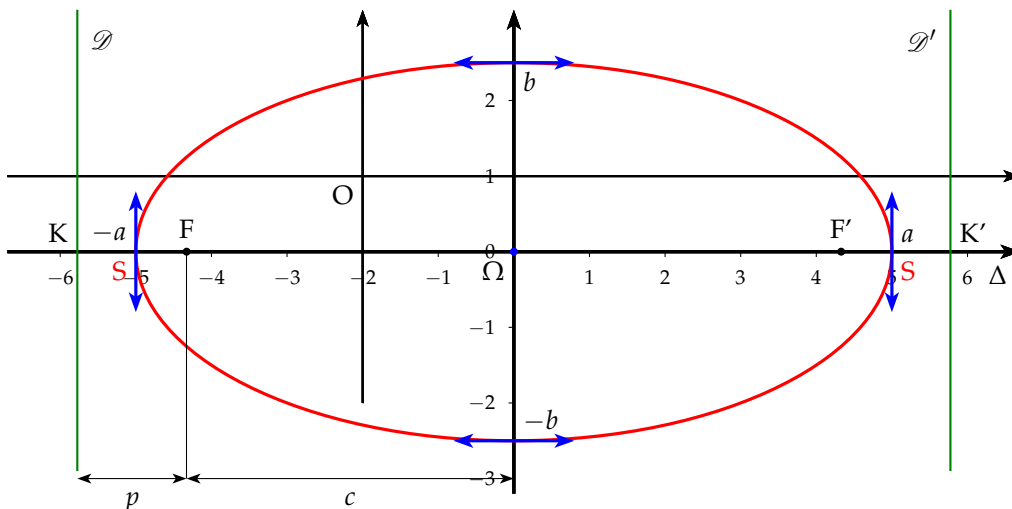
On pose : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$ donc $\Omega(2; -1)$

On obtient alors : $X^2 + 4Y^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{(\frac{5}{2})^2} = 1$

La conique est donc une ellipse avec $a = 5$ et $b = \frac{5}{2}$

On a : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$p = \frac{b^2}{c} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, $\Omega F = c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$



2.4.3 Hyperbole

Théorème 5 : Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère

$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sous la forme :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

alors la conique est une hyperbole.

Si on pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{et} \quad \Omega F = c$$

Les asymptotes ont pour équations : $Y = \frac{b}{a}X$ et $Y = -\frac{b}{a}X$

Démonstration : Nous avons vu au 1.3 que toute équation du second degré se

mettant sous la forme : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$ était une hyperbole.

Nous avons vu au 2.3 que $a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2}$ et $b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}$ donc $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$

On a alors :

- $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$ en posant $c^2 = a^2 + b^2$ on obtient $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ soit $e = \frac{c}{a}$
- $b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2(e^2 - 1)}{e^2} = \frac{b^2 \times \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$
- $\Omega F = \frac{e^2 p}{e^2 - 1} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$

Exemple : Déterminer les éléments caractéristiques de la conique :

$$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$$

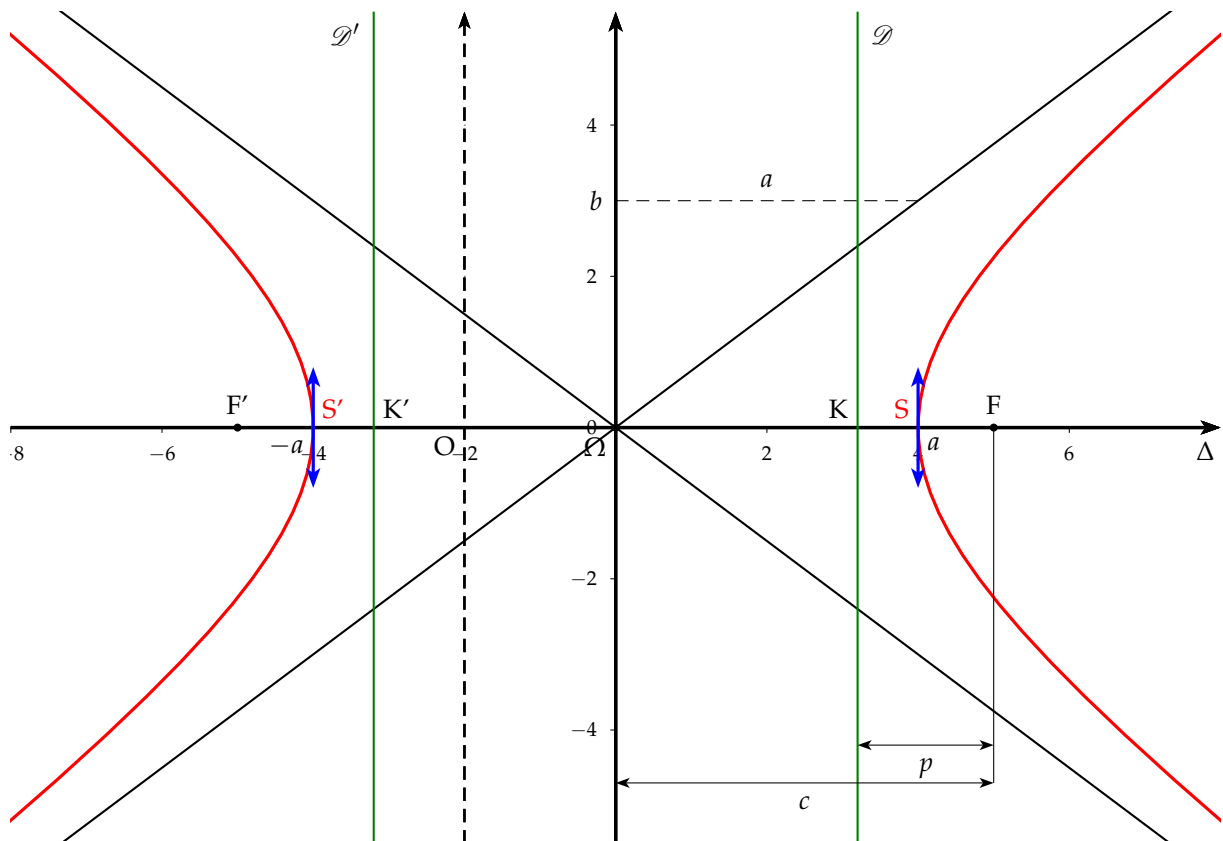
On pose : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \end{cases}$ donc $\Omega(2; 0)$

On obtient alors : $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$

La conique est donc une hyperbole avec $a = 4$ et $b = 3$

On a : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

$p = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}$, $\Omega F = c = 5$ et les asymptotes d'équations $Y = \pm \frac{3}{4}X$



2.5 Définition bifocale d'une ellipse et d'une hyperbole

Théorème 6 : On a les relations suivantes :

- La somme des distances d'un point M d'une ellipse à ses deux foyers F et F' est égale à la longueur de son grand axe.

$$MF + MF' = 2a$$

Réciproquement tout point M dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est constante appartient à une ellipse de foyers F et F'

- La différence des distances d'un point M d'une hyperbole à ses deux foyers F et F' est égale à la longueur entre ses deux sommets.

$$|MF - MF'| = 2a$$

Réciproquement tout point M dont la différence des distances à deux points fixes F et F' est constante appartient à une hyperbole de foyers F et F'

Démonstration :

- Pour l'ellipse on a : $\frac{MF}{MH} = e$ avec $c^2 = a^2 - b^2$

On a alors : $MF = eMH$ et $MF' = eMH'$ donc $MF + MF' = e(MH + MH')$

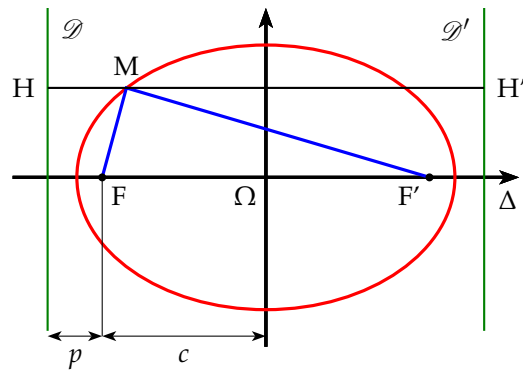
$$\text{or } MH + MH' = HH' = 2(p + c) = 2 \left(\frac{b^2}{c} + c \right) = 2 \left(\frac{b^2 + c^2}{c} \right) = \frac{2a^2}{c}$$

D'où

$$MF + MF' = e \times \frac{2a^2}{c} = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} = 2a$$

La réciproque est admise.

Remarque : Un façon de tracer une ellipse est d'attacher une ficelle à 2 points puis en tendant la ficelle faire parcourir un stylo le long de celle-ci.



- Pour l'hyperbole on a : $\frac{MF}{MH} = e$ avec $c^2 = a^2 + b^2$

On a alors :

$$MF = eMH \quad \text{et} \quad MF' = eMH' \quad \text{donc} \quad |MF - MF'| = e |MH - MH'|$$

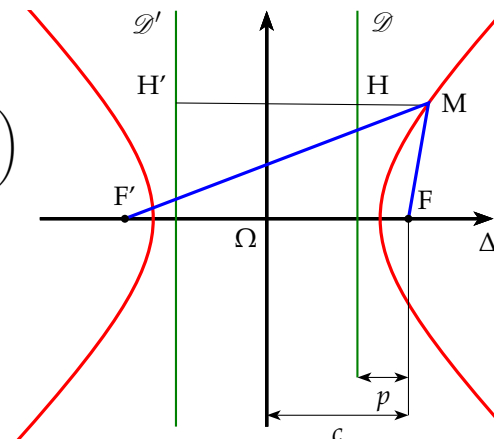
or

$$\begin{aligned} |MH - MH'| &= HH' = 2(c - p) \\ &= 2 \left(c - \frac{b^2}{c} \right) = 2 \left(\frac{c^2 - b^2}{c} \right) \\ &= \frac{2a^2}{c} \end{aligned}$$

D'où

$$|MF - MF'| = e \times \frac{2a^2}{c} = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} = 2a$$

La réciproque est admise.



3 Équation paramétrique d'une conique

3.1 Paramétrage d'une ellipse

Théorème 7 : Une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0; 2\pi[$$

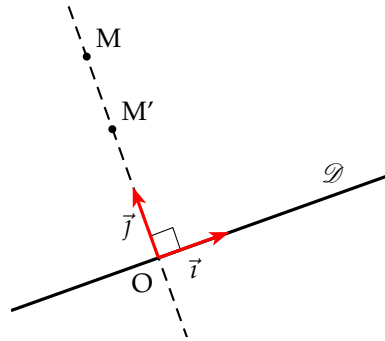
3.2 Affinité orthogonale

Définition 3 : Soit \mathcal{D} une droite, on appelle **affinité orthogonale** d'axe \mathcal{D} et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, l'application affine f qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ où O est la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} .

On a le schéma suivant avec un rapport k compris entre 0 et 1.

La matrice associée à l'application f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$



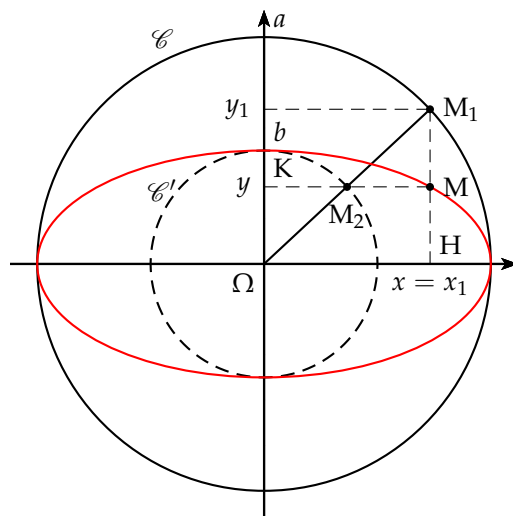
Théorème 8 : Dans le repère orthonormé $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$, soit

- le cercle \mathcal{C} de rayon a
- l'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$

On passe du cercle \mathcal{C} à l'ellipse \mathcal{E} par une affinité orthogonale d'axe (Ωx) et de rapport $\frac{b}{a}$.

Construction :

Pour déterminer un point M de l'ellipse à partir d'un point M_1 du cercle \mathcal{C} , on détermine le point M_2 , intersection du cercle \mathcal{C}' de rayon b avec $[\Omega M_1]$. Le point M est alors l'intersection des droites (M_1H) et (M_2K) .



Démonstration : On revient à la représentation paramétrique des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de rayon respectifs a et b .

$$\mathcal{C} \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad \mathcal{C}' \begin{cases} x = b \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

Comme l'abscisse de M est la projection orthogonale de M_1 sur (Ox) et l'ordonnée de M la projection orthogonale de M_2 sur (Oy) , les coordonnées du point M sont :

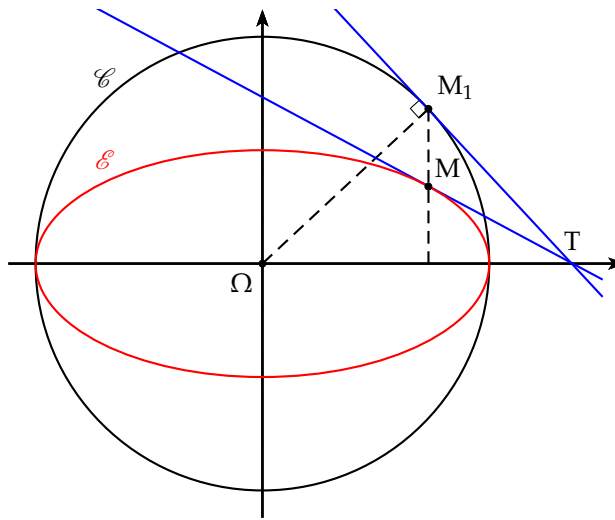
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \text{ qui correspond à la représentation paramétrique de l'ellipse } \mathcal{E}.$$

De plus $\frac{y}{y_1} = \frac{b \sin t}{a \sin t} = \frac{b}{a}$. On passe donc du cercle \mathcal{C} à l'ellipse \mathcal{E} par une affinité orthogonale d'axe (Ωx) et de rapport $\frac{b}{a}$.

Remarque : Un ellipse est donc le représentation d'un cercle dans un repère orthogonal non normé.

Théorème 9 : Les tangentes d'un point du cercle \mathcal{C} et du point M correspondant à l'ellipse \mathcal{E} sont sécantes à l'axe (Ωx) au même point T

Démonstration :



On revient à la représentation paramétrique de l'ellipse \mathcal{E}

$$\overrightarrow{\Omega M} \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{on dérive} \quad \frac{d\overrightarrow{\Omega M}}{dt} \begin{cases} x' = -a \sin t \\ y' = b \cos t \end{cases}$$

Le coefficient directeur de la tangente en T, point d'intersection de l'ellipse \mathcal{E} avec l'axe des abscisses :

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y_T - y}{x_T - x} \Leftrightarrow \frac{b \cos t}{-a \sin t} = \frac{0 - b \sin t}{x_T - a \cos t} \Leftrightarrow x_T - a \cos t = \frac{ab \sin^2 t}{b \cos t} \Leftrightarrow$$

$$x_T = \frac{a \sin^2 t}{\cos t} + a \cos t = \frac{a}{\cos t}$$

Pour le cercle \mathcal{C} : $\overrightarrow{\Omega M_1} \begin{cases} x_1 = a \cos t \\ y_1 = a \sin t \end{cases} \quad \text{on dérive} \quad \frac{d\overrightarrow{\Omega M_1}}{dt} \begin{cases} x'_1 = -a \sin t \\ y'_1 = a \cos t \end{cases}$

Le coefficient directeur de la tangente en T_1 , point d'intersection du cercle \mathcal{C} avec l'axe des abscisses :

$$\frac{y'_1}{x'_1} = \frac{y_{T_1} - y_1}{x_{T_1} - x_1} \Leftrightarrow \frac{a \cos t}{-a \sin t} = \frac{0 - a \sin t}{x_{T_1} - a \cos t} \Leftrightarrow x_{T_1} - a \cos t = \frac{a \sin^2 t}{\cos t} \Leftrightarrow$$

$$x_{T_1} = \frac{a \sin^2 t}{\cos t} + a \cos t = \frac{a}{\cos t}$$

On a bien : $x_T = x_{T_1}$

Remarque : Pour construire la tangente en M, on trace la perpendiculaire en M₁ qui coupe l'axe des abscisses en T. On trace ensuite la droite (TM) qui correspond à la tangente en M

3.3 Construction de la tangente à une conique

Théorème 10 : Soit Γ une conique de foyer F et de directrice \mathcal{D} . La tangente Δ à Γ en tout point M de Γ qui n'appartient pas à l'axe focal coupe \mathcal{D} en un point T tel que :

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = 0$$

Remarque : On fera la démonstration avec l'ellipse, la démonstration avec l'hyperbole est identique.

Soit le point $M(x_0; y_0)$ de Γ , ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

D'après 2.4.2 on a $OK = \frac{a^2}{c}$ et $OF = c$.

On isole y^2 : $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

On dérive par rapport à x en x_0 , on a :

$$2y'_0 y_0 = -\frac{2b^2}{a^2} x_0 \Leftrightarrow y'_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

L'équation de la tangente en M : $y = y'_0(x - x_0) + y_0$

On remplace :

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2$$

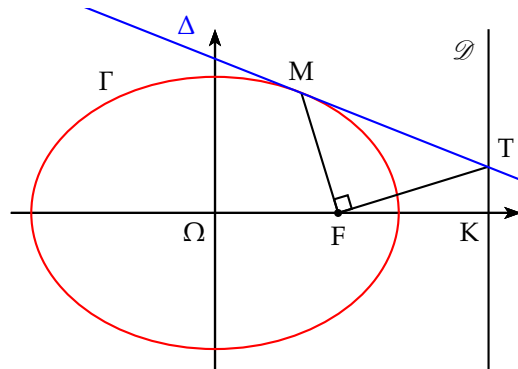
$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 \Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

or M appartient à l'ellipse Γ donc : $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. on a alors :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0 x}{a^2}\right)$$

En T, on a : $x_T = \frac{a^2}{c}$ donc $y_T = \frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{c}\right)$

Les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FT} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} &= (x_0 - c) \left(\frac{a^2}{c} - c \right) + b^2 \left(1 - \frac{x_0}{c} \right) \\ &= \frac{a^2 - c^2}{c} (x_0 - c) + \frac{b^2}{c} (c - x_0) = 0 \quad \text{car } a^2 - c^2 = b^2\end{aligned}$$

3.4 Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Théorème II : Soit l'hyperbole Γ d'équation dans le repère orthonormé

$$(\Omega; \vec{i}; \vec{j}) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'hyperbole Γ dans le repère normé centré en Ω et dirigé vers ses deux asymptotes $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$ a pour équation :

$$XY = \frac{c^2}{4}$$

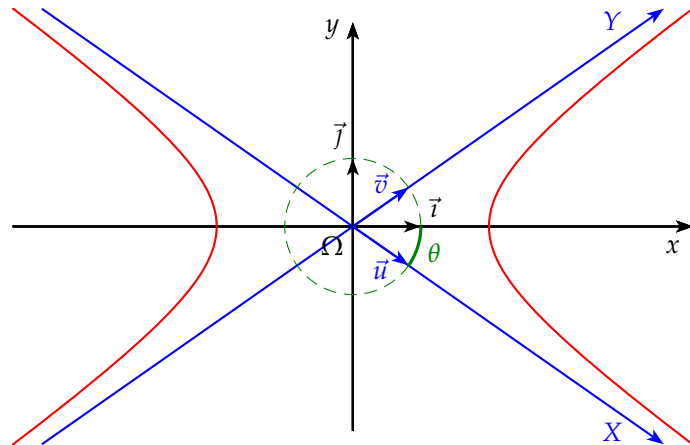
Dans $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Asymptotes : } y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \text{ donc } \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan \theta}$$



Démonstration :

$$\text{On a : } \begin{cases} \vec{u} = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \end{cases} \text{ donc } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ -\sin \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient alors : } \begin{cases} x = \cos \theta (X + Y) \\ y = \sin \theta (Y - X) \end{cases}$$

$$\text{L'équation de } \Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow (\times a^2) \quad x^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2$$

On remplace en fonction de X et Y :

$$\cos^2 \theta (X + Y)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} (Y - X)^2 = a^2$$

$$\cos^2 \theta (X + Y)^2 - \cos^2 \theta (Y - X)^2 = a^2$$

$$\cos^2 \theta [(X + Y)^2 - (Y - X)^2] = a^2$$

$$\cos^2 \theta \times 4XY = a^2 \Rightarrow XY = \frac{a^2}{4 \cos^2 \theta}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\text{L'équation de } \Gamma \text{ dans } (\Omega; \vec{u}; \vec{v}) \text{ est donc : } XY = \frac{c^2}{4}$$

Remarque :

Une hyperbole est équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires.

On a alors $a = b$ donc $c^2 = 2a^2$. L'équation de Γ vaut : $XY = \frac{a^2}{2}$

C'est cette hyperbole qui est la représentation des fonctions homographiques :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$