Logique mathématique et théorie des ensembles

Table des matières

1 Logique mathématique

1.1 Introduction

Le raisonnement mathématique obéit à une logique. À la limite de la philosophie, la logique est une branche des mathématiques qui permet d'établir la valeur de vérité de propositions et de construire des raisonnements mathématiques. Depuis les recherches sur la logique du XIXe siècle sont apparus des nouveaux symboles, qu'un mathématicien utilise maintenant couramment, comme :

$$\Rightarrow \ , \ \Leftrightarrow \ , \ \forall \ , \ \exists$$

⚠ Ces symboles sont souvent utilisés comme abréviation, sans connaissance de leur véritable signification. Il faut éviter d'employer ces symboles comme de simples signes permettant d'écrire plus vite. On retiendra que si l'on rédige en français, l'usage des ces symboles est une faute.

> "La logique mathématique diffère de la logique formelle philosophique. Science de la démonstration, la logique mathématique consiste surtout en l'étude des rapports formels existant entre les propositions indépendamment de toute interprétation que l'on pourrait en donner ou des valeurs de vérité que l'on peut leur attribuer.
> La logique des prédicats(*) prolonge le calcul propositionnel en introduisant des variables et en étudiant la nature profonde des propositions ; elle constitue un outil important pour la rigueur du raisonnement mathématique"
>
> *Dictionnaire des mathématiques* Édition Puf.

(*) Un prédicat est une relation entre plusieurs variable, par exemple l'inégalité "$\geqslant$" est un prédicat reliant deux variables.

1.2 Vocabulaire usuel

1.2.1 Expression

Définition 1 : Une **expression** est un ensemble de signes (lettres, chiffres, symboles, mots, etc.) possédant une signification dans un **contexte donné**.

Exemples :

- Soit un réel x, on considère l'expression : $3x^2 + 4x - 5$
- Dans le plan, on considère ABC un triangle.
- Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$
- Soit la suite S_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
- Dans le plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à un point $\mathrm{M}(z)$ associe le point $\mathrm{M}'(z')$ telle que : $z' = (2+i)z + 3$

1.2.2 Proposition

Définition 2 : Une **proposition** (ou insertion ou affirmation) p propose l'expression d'un fait qui peut être vrai ou faux. Une proposition logique est synonyme d'énoncé.

Principe de non contradiction : p ne peut être à la fois vraie et fausse.

Principe du tiers exclus (dualité) : soit p est vraie, soit p est fausse.

Exemples :

- p_1 : L'équation $3x^2 + 4x - 5 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
  p_1 est vraie car $\Delta = 16 + 60 = 76 > 0$.
- p_2 : Le carré d'un nombre réel est strictement positif.
  p_2 est fausse car $0^2 = 0 \not> 0$
- p_3 : Pour tout nombre naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.
  p_3 est vraie car $4^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0\ [3]$.
- p_4 : Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.
  p_4 est vraie car c'est une propriété du triangle rectangle.
- p_5 : Une suite numérique (u_n) croissante tend vers $+\infty$
  p_5 est fausse. Il suffit de trouver une suite croissante majorée.
  Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
  La suite (u_n) est manifestement croissante majorée par 1, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge.

Remarque : Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un contre exemple.

1.2.3 Axiome, théorème, corollaire, lemme

Définition 3 : Propositions particulières :

- Un **axiome** est une proposition supposée vraie et que l'on ne cherche pas à démontrer.
- Un **théorème** est une proposition dont il faut établir la véracité. Un théorème est donc vrai s'il se déduit logiquement d'axiomes.
- Un **corollaire** d'un théorème est un bonus qu'offre le théorème. C'est une conséquence directe du théorème.
- Un **lemme** est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.
- Une **conjecture** est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer. C'est une hypothèse plausible au vu de quelques exemples.

1.2.4 Exemples

Axiomes :

- Euclide a énoncé 5 axiomes ("*les cinq postulats d'Euclide*"), qu'il demande d'admettre et qui sont à la base de la géométrie élémentaire (géométrie euclidienne). Le cinquième postulat est particulièrement célèbre :

  « *Par un point extérieur à une droite, on ne peut tracer qu'une parallèle.* »

  car les mathématiciens se sont demandés s'il ne pouvait pas être démontré à partir des 4 autres. Après de nombreux essais, les mathématiciens ont dû admettre qu'il était essentiel à la géométrie euclidienne puis Riemann et Lobatchevski franchirent le pas énorme de développer une autre géométrie en changeant ce cinquième postulat (géométrie non euclidienne).

- Un autre exemple sont les 5 axiomes de Peano. Ceux-ci définissent l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (ensemble élémentaire des nombres). Le cinquième axiome affirme :

  « *Si* $\mathbb{P}$ *est une partie de* $\mathbb{N}$ *contenant* 0 *et telle que le successeur de chaque élément de* $\mathbb{P}$ *est dans* $\mathbb{P}$ $(n \in \mathbb{P} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{P})$*, alors* $\mathbb{P} = \mathbb{N}$ ».

  Cet axiome est appelé « *l'axiome d'induction* » ou encore « *l'axiome de récurrence* » qui permet la démonstration par récurrence.

Ces énoncés ont en commun de paraître « *évident* » pour tout le monde.

Théorèmes :

- Tout le monde connaît les théorèmes de Thalès (que Thalès semble ne jamais avoir énoncé) et Pythagore (qui semble n'avoir jamais rien écrit) qui sont la base de la géométrie dans le secondaire.
- En terminale, on peut citer le théorème des valeurs intermédiaires en analyse ou les théorèmes de Gauss et de Bézout en arithmétique.
- Enfin on peut citer le célébrissime grand théorème de Fermat :

  « *Il n'existe pas de nombres entiers non nuls* x, y *et* z, *dès que la puissance* n *est strictement supérieure à* 2, *à l'équation :* $x^n + y^n = z^n$. »

  qui est resté à l'état de conjecture pendant 350 ans avant d'être enfin entièrement démontré par Andrew Wiles en 1994.

On réserve le mot « *théorème* » aux propositions particulièrement importantes. Pour les autres propositions démontrées, on les appelle propriété, conséquence ou simplement proposition qui en dehors de la logique mathématique peut être un synonyme de théorème.

Corollaires :

- Le corollaire du théorème Bézout qui permet de connaître l'existence de solutions dans une équation diophantienne linéaire du premier degré.

- Le corollaire du théorème de Gauss qui permet d'affirmer que si deux entiers premiers entre eux divisent un troisième, leur produit divise ce dernier.

Lemme :

Un lemme très célèbre est le lemme d'Abel qui vous verrez en supérieur sur la convergence d'une série entière.

Conjectures :

- Un conjecture célèbre liée au grand théorème de Fermat, la conjecture STW de Taniyama-Shimura-Weil. Cette conjecture établit un lien entre un objet géométrique et l'arithmétique. C'est cette conjecture que Andrew Wiles démontra.
- En arithmétique, la conjecture de Gauss (qu'il n'a pas écrit par prudence) est la suivante :

  pour un réel $x \geqslant 2$, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x et $\text{Li}(x)$ le nombre $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ ($\text{Li}(x)$ s'appelle le logarithme intégral de x). On a découvert avec le temps que ces deux expressions sont proches l'une de l'autre quand x est grand. On s'est alors intéressé à la différence $\pi(x) - \text{Li}(x)$. À partir d'un grand nombre de calculs numériques, on a conjecturé que pour tout réel $x \geqslant 2$, on avait $\pi(x) < \text{Li}(x)$. On a longtemps pensé que ce résultat était vrai, mais un mathématicien du nom de Skewes a démontré un jour que ce résultat était faux pour au moins un réel x (nombre de Skewes). Puis on a découvert que le résultat était faux pour une infinité de valeurs de x.

Les conjectures sont le moteur du progrès des mathématiques. Tel ou tel mathématicien a eu l'impression que tel ou tel résultat important était vrai et l'a énoncé sans pouvoir le démontrer, laissant à l'ensemble de la communauté mathématique le soin de le confirmer par une démonstration convaincante ou de l'infirmer.

2 Les connecteurs ou fonctions logiques

On peut composer des expressions ou des propositions en utilisant certains mots ou certains symboles possédant une signification tels que les connecteurs logiques (connecteurs propositionnels) et les quantificateurs.

2.1 Négation, conjonction et disjonction

Définition 4 : Soit deux propositions p et q. On définit :

- la proposition NON p, notée $\overline{p}$, la proposition qui est fausse lorsque p est vraie et vraie lorsque p est fausse ;
- la proposition p ET q notée $p \wedge q$, la proposition qui est vraie lorsque p et q sont simultanément vraies et fausse dans les autres cas ;
- la proposition p OU q notée $p \vee q$, la proposition qui est fausse lorsque p et q sont simultanément fausses et vraie dans les autres cas.

⚠ La négation ne signifie pas opposé.

- La négation de « *ce chat est noir* » n'est pas « *ce chat est blanc* » mais « *ce chat n'est pas noir* ».
- La négation de « *f est la fonction nulle* » n'est pas « *f s'annule* » mais « *f n'est pas la fonction nulle* ».

- La négation d'une inégalité stricte est une inégalité large (et vice versa), ainsi la négation de « x *négatif* ($x < 0$) » n'est pas « x *positif* ($x > 0$) » mais « x *positif ou nul* ($x \geqslant 0$) ».

⚠ Dans la langue usuelle, on oppose souvent les termes qui relie la disjonction OU (ou exclusif), ainsi dans la phrase « *je vais au cinéma ou au théâtre* », on comprend que la personne va soit au cinéma, soit au théâtre mais pas au deux.
En logique mathématique le OU est non exclusif, si x est un réel qui vérifie $x < 5$ ou $x > 3$ revient à dire que $x \in \mathbb{R}$.

Exemples : Soit n un entier naturel, x un réel, z un complexe, A, B, C, D quatre points du plan et (u_n) une suite numérique :

p	$\overline{p}$
$x > 4$	$x \leqslant 4$
A, B, C alignés	ABC triangle
$u_n \to \ell$	(u_n) diverge

p	q	$p \wedge q$
$x < 10$	$x \geqslant 2$	$x \in [2\,;\,10[$
ABCD losange	ABCD rectangle	ABCD carré
$\lvert z\rvert = 1$	$\arg(z) = \pi$	$z = -1$

p	q	$p \vee q$
$x < 2$	$x \geqslant 10$	$x \in]-\infty\,;\,2[\cup[10\,;+\infty[$
n multiple de 3 inférieur à 10	n pair inférieur à 10	$n \in \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

2.2 Tables de vérité

Définition 5 : Table de vérité.

Une table de vérité est un tableau définissant la valeur d'une fonction logique pour chacune des combinaisons possibles des entrée.
Par convention et pour faciliter la lecture de grandes tables, on écrit 0 pour la valeur faux et 1 pour la valeur vrai.

Remarque : La logique des propositions est dite "*vérifonctionnelle*" car elle obéit à une table de vérité.

Tables de vérité des connecteurs "NON", "ET", "OU" soit $\overline{p}$, $p \wedge q$ et $p \vee q$.

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

2.3 Propriétés et lois De Morgan

Propriété 1 : Soit p et q deux propositions.

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ et $p \vee q \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$
- Lois De Morgan : $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ et $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

Démonstration : À l'aide des tables de vérité.

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$
1	0	1
0	1	0

p	q	$p \vee q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Remarque : On peut remarquer que l'on peut exprimer le connecteur de disjonction OU uniquement avec le connecteur de négation NON et le connecteur de conjonction ET. En effet ces deux connecteurs sont suffisant pour exprimer tous les autres.

2.4 Implication

Définition 6 : Soit deux propositions p et q.

On définit la proposition p implique q ou si p, alors q, notée $p \Rightarrow q$ la proposition qui est fausse lorsque l'on a simultanément p vraie et q fausse et vraie dans les autres cas.

- q est une **condition nécessaire** pour que p soit vraie car lorsque p est vraie **nécessairement** q l'est aussi ;
- p est une **condition suffisante** pour que q soit vraie car il **suffit** que p soit vraie pour que q le soit.

Exemples :
- Si le triangle ABC est équilatéral alors le triangle ABC est isocèle.
- Soit x un réel. Si $x = -2$ alors $x^2 = 4$

Pour que le triangle ABC soit équilatéral, il est nécessaire que le triangle ABC soit isocèle et pour que le triangle ABC soit isocèle, il est suffisant que le triangle ABC soit équilatéral.

Pour que $x = -2$, il est nécessaire que $x^2 = 4$ et pour que $x^2 = 4$, il est suffisant que $x = -2$

Remarque : La structure d'un théorème obéit à la structure $h \Rightarrow c$. En effet il se décompose en deux parties : les hypothèses (proposition h) puis les conclusions (proposition c). Si le théorème est démontré alors on a $h \Rightarrow c$. Pour montrer qu'un théorème est faux, il suffit de montrer, par un contre-exemple, qu'il existe un cas où h est vrai avec c faux.

Table de vérité

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarque : Au premier abord les deux dernières lignes peuvent sembler troublantes car lorsque p est fausse, l'implication est toujours vraie quelque soit la valeur de vérité de q. En y réfléchissant davantage, on constate, ce que les grecs avaient déjà constaté, du faux on peut déduire ce que l'on veut. On ne peut rien bâtir sur du sable !

> *Du vrai suit le vrai... du faux suit le faux... du faux suit le vrai... mais du vrai, le faux ne peut s'ensuivre.*
>
> Diogène Laërce, *Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres*, livre VII, 83

Cette dernière remarque nous montre que $p \Rightarrow q$ peut être vraie sans que p le soit. Ainsi lorsque l'on écrit p est vrai donc q est vrai cela ne correspond pas à $p \Rightarrow q$ mais à p est vraie, si p alors q, donc q est vrai, ce qui se traduit en langage mathématique à :

$$p \text{ et } (p \Rightarrow q), \text{ donc } q$$

⚠ Il ne faut donc pas écrire « $\Rightarrow$ » pour dire « donc ».

L'implication correspond à la structure d'un syllogisme chez les grecs.
Par exemple avec : p : « être un homme » et q : « être mortel »

Socrate est un homme. p
Tous les hommes sont mortels. $p \Rightarrow q$
Donc Socrate est mortel. q

Théorème 1 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $p \Rightarrow q$ et $\overline{p} \vee q$ (NON p OU q)
- $p \Rightarrow q$ et $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ (si NON q alors NON p) (**contraposée**)

Démonstration : Avec les tables de vérité :

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Exemples : La contraposée de :

- « si le triangle ABC est équilatéral alors le triangle ABC est isocèle » est « si le triangle ABC n'est pas isocèle alors le triangle ABC n'est pas équilatéral ».
- « f dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f continue sur $\mathbb{R}$ » est « f non continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f non dérivable sur $\mathbb{R}$ »

La contraposée est parfois très utile pour démontrer une proposition. Par exemple avec le test de primalité d'un entier « si l'entier n n'est pas premier (proposition p) alors n admet un diviseur premier inférieur ou égale à $\sqrt{n}$ ».
Si l'on veut prouver que le nombre n est premier (proposition $\overline{p}$), on montrera qu'il n'existe aucun diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. On a ainsi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.
107 n'est pas divisible par 2, 3, 5 et 7 donc 107 est premier.

2.5 Équivalence

Définition 7 : Soit deux proposition p et q.

On définit la proposition p est équivalente à q ou p si, et seulement si, q, notée $p \Leftrightarrow q$ la proposition qui est vraie lorsque l'on a simultanément p et q vraies ou fausses, et fausse dans les autres cas.

- q est une **condition nécessaire et suffisante** pour que p soit vraie.
- p est une **condition nécessaire et suffisante** pour que q soit vraie.

Exemples : Les entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entier $(u; v)$ tel que $au + bv = 1$ (théorème de Bézout).

Soit x un nombre réel. $x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ ou $x = -2$.

Soit ABC un triangle.
ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow$ $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2$. (théorème de Pythagore)

Table de vérité

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Théorème 2 : Définition de la réciproque.

On appelle réciproque de l'implication « $p \Rightarrow q$ », la proposition « $q \Rightarrow p$ ».

L'équivalence est une double implication, c'est à dire :

$$(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q \text{ ET } q \Rightarrow p)$$

Démonstration : avec la table de vérité :

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Remarque : Il est parfois plus facile de montrer une double implication qu'une équivalence. C'est par exemple le cas si l'on veut démontrer le théorème de Bézout.

3 Les quantificateurs

3.1 Le quantificateur universel et le quantificateur existentiel

Définition 8 : Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un argument x (prédicat).

- **Quantificateur universel :** $\forall$ « pour tout » ou « quelque soit »

  La proposition : $\forall x \in E, \;\; \mathcal{P}(x)$ signifie que
  « pour tout élément x de E, la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

- **Quantificateur existentiel :** $\exists$ « il existe au moins »

  La proposition : $\exists\, x \in E, \;\; \mathcal{P}(x)$ signifie que
  « il existe au moins un élément x de E pour lequel la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

- **Quantificateur existentiel et unicité :** $\exists\,!$ « il existe un unique »

  La proposition : $\exists\,!\, x \in E, \;\; \mathcal{P}(x)$ signifie que
  « il existe un unique élément x de E pour lequel la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : Suivant les auteurs le symbole $\forall$ qui est un A renversé vient soit de l'anglais « All », soit le l'allemand « Alle ». De même le symbole $\exists$ qui est un E retourné vient soit de l'anglais « Exist », soit de l'allemand « Existieren ».

La virgule qui suit le quantificateur existentiel $\exists$ peut être traduite par « tel que » ou « pour lequel ». Certains auteurs, au lieu de mettre une virgule, mettent un « slash » \, ainsi ils écrivent $\exists\, x \in E \backslash \;\; \mathcal{P}(x)$

Exemples :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 \geqslant 0$ « Pour tous réel x, x^2 est positif ou nul »
- $\exists\, x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 = 1$ « Il existe au moins un réel x tel que $x^2 = 1$ »
- $\exists\,!\, x \in [0;1], \;\; x^2 + 4x + 1 = 0$

  « Il existe un unique réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$ tel que $x^2+4x+1 = 0$ »
- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$

  $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; f$ fonction nulle sur $\mathbb{R}$

  $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \;\; x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \;\; \Leftrightarrow \;\; f$ fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Soit une suite (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{R}$

  $\exists\, n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} < u_n \;\; \Leftrightarrow \;\; (u_n)$ n'est pas croissante

3.2 Négation d'un quantificateur

Définition 9 : La négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle et réciproquement. Ainsi

- $\overline{\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E,\ \overline{\mathcal{P}(x)}$
- $\overline{\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \overline{\mathcal{P}(x)}$

Exemples :

- Soit la proposition :
  « Tous les lecteurs de ce chapitre comprennent tout ce qui est écrit »
  Sa négation sera donc :
  « Il existe au moins un lecteur qui ne comprend pas ce chapitre »
- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
  La négation de : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ est $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

Pour démontrer qu'une proposition universelle n'est pas vraie, il suffit donc de trouver un seul x qui ne vérifie pas la proposition $\mathcal{P}(x)$. C'est ce qu'on nomme un « **contre-exemple** ».

3.3 Ordre des quantificateurs

Propriété 2 : Soit une proposition possédant deux quantificateurs.

- On peut permuter les quantificateurs s'ils sont de même nature, ainsi :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \mathcal{P}(x,y) \Leftrightarrow \forall y \in E,\ \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$$
$$\exists x \in E,\ \exists y \in E,\ \mathcal{P}(x,y) \Leftrightarrow \exists y \in E,\ \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$$

- On ne peut permuter les quantificateurs s'ils sont de natures différentes, ainsi :

$$\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ \mathcal{P}(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y \in E,\ \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$$
$$\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ \mathcal{P}(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y \in E,\ \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$$

Exemples :

- Deux proposition qui définissent la décroissance d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.
  1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
  2) $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- $\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$ signifie :

  « Pour tout réel M, il existe un réel x tel que $f(x)$ soit supérieur M. »
  Si la proposition est vraie, la fonction f n'est pas majorée.

  $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R},\ f(x) > M$ signifie

  « Il existe un réel x tel que $f(x)$ est supérieur à tous réels M. »
  Cette proposition est, de toute évidence, toujours fausse.

Remarque : Les quantificateurs sont très utiles pour formuler de manière condensée certaines propriétés. Par exemple pour définir la convergence d'une suite (u_n) vers ℓ, qui est définie en terminale par :
« Tout intervalle ouvert, centrée en ℓ, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N »

On peut alors écrire avec des quantificateurs :

$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$

Pour tout rayon ϵ de l'intervalle ouvert contenant ℓ, il existe un rang N, dépendant de ϵ, tel que pour tout naturel n supérieur ou égal à N, la distance de u_n à ℓ est plus petite que ϵ.

4 Théorie des ensembles

4.1 Définitions

La notion d'ensemble est une notion intuitive que l'on ne peut définir. On pourrait définir un ensemble comme une collection d'objets ou d'éléments. Cependant il faudrait alors définir une collection etc. En bout de chaîne, on reviendrait au mot ensemble comme dans les dictionnaires. On prend alors le mot ensemble comme un **terme primitif**. On parle d'ensembles de nombres, de points, de fonctions etc.

Définition 10 : Un **ensemble** est une collection d'éléments que l'on peut énumérer ou définir par une propriété. On note souvent un ensemble par une majuscule $(A, B, C, \ldots)$ et ses éléments par une minuscule $a, b, c \ldots$

Certains ensembles ont des notations particulières (ex. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on dit que cet ensemble est défini par **extension**.

$$E = \{a \ , \ b \ , \ c \ , \ldots\}$$

Lorsqu'on définit un ensemble par une propriété, on dit que cet ensemble est défini par **compréhension**.

$$E = \{x \in A \mid \mathcal{P}(x)\}$$

L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle : **l'ensemble vide** noté « $\varnothing$ ».

Un ensemble qui ne contient qu'un élément s'appelle un **singleton**.

Exemples : Ensembles définis par extension

- A : ensemble des chiffres impairs : $A = \{1 \ , \ 3 \ , \ 5 \ , \ 7 \ , \ 9\}$.
- B : ensemble des figures d'un jeu de carte : $B = \{\text{valet} \ , \ \text{dame} \ , \ \text{roi}\}$
- C : ensemble des puissances de 2 : $C = \left\{2^0 \ , \ 2^1 \ , \ 2^2 \ , \ 2^3 \ , \ \ldots\right\} = \left\{2^i\right\}_{i \in \mathbb{N}}$

Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir que par compréhension.

- C : l'ensemble des nombres d'une grille de Loto : $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 49\}$.
- D : l'ensemble des entiers naturels pairs : $2\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ x = 2k\}$.

La barre verticale | se lit « tel que »

Remarque : La définition par compréhension peut cacher des « pièges » pour les mathématiciens. On peut à l'aide d'une propriété rendre l'ensemble paradoxal.

L'anglais Bertrand Russel (1872-1970) a proposé un tel ensemble popularisé sous la forme du paradoxe des catalogues : un libraire décide de faire le catalogue K des catalogues qui ne sont pas catalogués. Le catalogue K devra-t-il figurer dans ce nouveau catalogue ?

Si K se contient, il est donc catalogué et ne peut y figurer. Si K ne se contient pas, il doit y figurer. Ceci est contradictoire. Le catalogue K est donc inclassable, il est dit paradoxal.

Définition 11 : Ensembles particuliers.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux i.e. les nombres $d = \dfrac{a}{10^p}$ qui peuvent s'écrire comme le rapport d'un entier relatif a sur une puissance p de 10 où p est un entier relatif.
- $\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels i.e. les nombres $q = \dfrac{a}{b}$ qui peuvent s'écrire comme le rapport d'un entier relatif a sur un entier naturel non nul b et tels que a et b soient premiers entre eux.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres rationnels et irrationnels (comme $\sqrt{2}$). Ces nombres n'ont pas été précisément définis en terminale et fera l'objet d'une construction en supérieur.
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres z qui peuvent s'écrire sous la forme $z = a + ib$, avec a et b réels et tel que $i^2 = -1$.

Exemple : $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N} \text{ et } q \neq 0 \right\}$

Remarque : On peut utiliser ces ensembles pour en créer d'autres.

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$: ensemble des réels non nuls.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$: ensemble des réels positifs ou nuls.

$3\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ x = 3k\}$: ensemble des entiers relatifs multiples de 3

4.2 Appartenance. Inclusion

Définition 12 : Soit E un ensemble non vide.

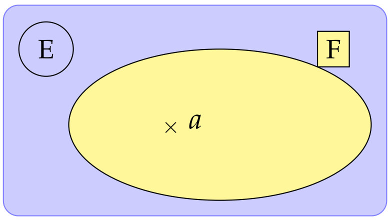
- Si un élément a appartient à l'ensemble E, on écrit : $a \in E$
- Si un ensemble F est inclus dans l'ensemble E, on dit que F est un sous ensemble de l'ensemble E. On écrit alors :

$$F \subset E \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in F,\ \ a \in E \ \text{ ou } \ F = \varnothing$$

Remarque : On peut visualiser cette propriété par un diagramme de Venn

$a \in E$: « a appartient à E »

$F \subset E$: « F est inclus dans E »



Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

⚠ Ne pas confondre les deux symboles $\in$ et $\subset$ qui sont très proche.

- $E = \{\varnothing\}$: ensemble qui contient l'ensemble vide. Il possède un élément donc E n'est pas vide. $\varnothing \in E$.
- $E = \varnothing$: E est l'ensemble vide, donc ne contient aucun élément.

Théorème 3 : $E = F \quad \Leftrightarrow \quad F \subset E$ et $E \subset F$

4.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 13 : Soit E un ensemble.

On appelle ensemble des partie de E, l'ensemble noté $\mathscr{P}(E)$ constitué des tous les sous ensemble de E.

$$\mathscr{P}(E) = \{F \mid F \subset E\}$$

Exemple : Soit l'ensemble $E = \{a\ ,\ b\ ,\ c\}$.

$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \{a,b,c\}\}$

4.4 Complémentaire d'un ensemble

Définition 14 : On appelle complémentaire de l'ensemble A dans l'ensemble E, l'ensemble noté $\complement_E(A)$ composé des éléments de E qui ne sont pas élément de A. Le complémentaire correspond au connecteur NON. On a alors :

$$a \in \complement_E(A) \;\Leftrightarrow\; a \in E \quad \text{et} \quad a \notin A$$

Le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à ».

Lorsque l'ensemble E est implicite, on note le complémentaire de A : $\overline{A}$ qui se prononce « A barre ».

Exemples : Soit E l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et soit A l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 20. On a donc :

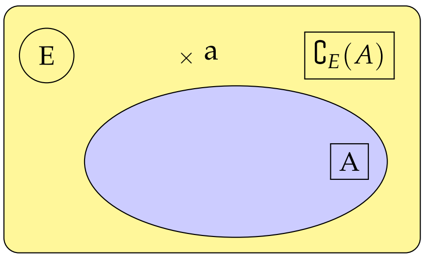
$$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$$

L'ensemble $\complement_E(A)$ sera donc l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui ne sont pas premiers. On a donc :

$$\complement_E(A) = \{0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

Soit l'ensemble P des entiers naturels pairs. L'ensemble $\mathbb{N}$ est ici implicite. On aura donc $\overline{P}$ l'ensemble des entiers naturels impairs.

Remarque : On peut visualiser le complémentaire de A dans E par le diagramme de Venn suivant :



4.5 Intersection de deux ensembles

Définition 15 : On appelle intersection de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cap B$ (A inter B) constitué des éléments communs à A et B. On a donc :

$$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A \text{ et } x \in B$$

Exemple : Soit A l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 20 et soit B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à 20. on a donc :

$$A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$
$$B = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$$

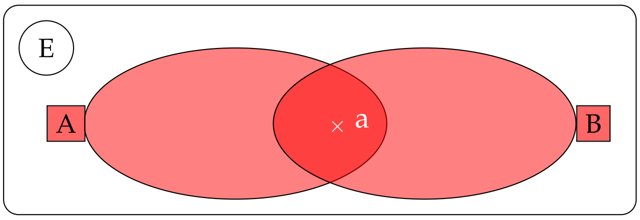
On a donc :

$$A \cap B = \{0,\ 6,\ 12,\ 18\}$$

qui n'est autre que l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 inférieurs ou égaux à 20.

Remarque :

- Visualisation de l'intersection des ensembles A et B par le diagramme de Venn :



- Lorsque l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on a alors :

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

- Lorsque les ensembles A et B sont disjoints, ils ne possèdent aucun élément commun, leur intersection est donc vide, on a donc :

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont disjoints}$$

L'ensemble A et sont complémentaire $\overline{A}$ sont disjoints, car : $A \cap \overline{A} = \varnothing$

4.6 Union de deux ensembles

Définition 16 : On appelle union de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cup B$ (A union B) constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (éventuellement aux deux, le « ou » étant non exclusif). On peut alors écrire :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Exemple : Soit A l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 20 et soit B l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à 20. on a donc :

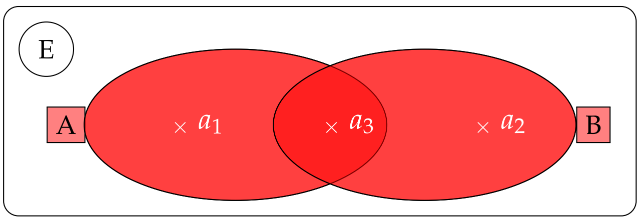
$$A = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$
$$B = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$$

On a donc :

$$A \cup B = \{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

Remarque :

- Visualisation de l'union des ensembles A et B par le diagramme de Venn :



- Lorsque l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on a alors :

$$A \subset B \;\Rightarrow\; A \cup B = B$$

- L'union de l'ensemble A et de son complémentaire $\overline{A}$ donne l'ensemble E, c'est à dire : $A \cup \overline{A} = E$

4.7 Lois De Morgan

Règle 1 : Soit A et B deux sous-ensembles de l'ensemble E. On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les complémentaires respectifs des ensembles A et B dans l'ensemble E. On a alors :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Le complémentaire de l'intersection est égal à l'union des complémentaires et le complémentaire de l'union est égal à l'intersection des complémentaires

Exemple : Le complémentaire se traduit en français par une négation. L'union et l'intersection se traduisent respectivement par les mots « ou » et « et ». Ainsi la négation de la phrase :
« je vais au théâtre ou au cinéma »
se traduit, grâce à notre règle par :
« je ne vais pas au théâtre et je ne vais pas au cinéma »
que l'on peut aussi traduire par :
« je ne vais ni au théâtre ni au cinéma »

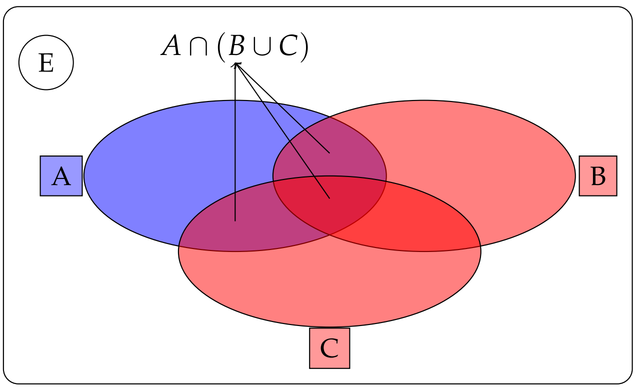
Remarque : On peut démontrer ces lois facilement grâce à une table de vérité.

4.8 Distributivité

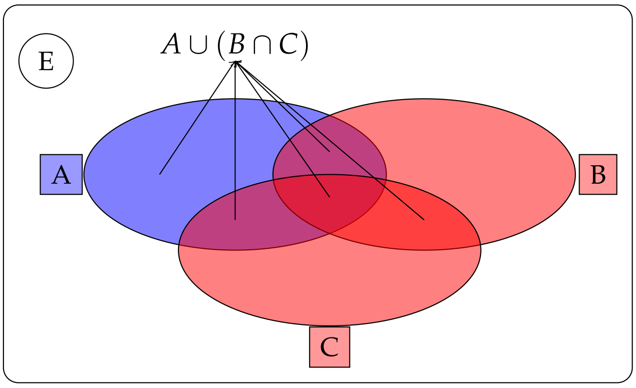
Règle 2 : Soit trois sous-ensembles A, B et C d'un ensemble E. on a alors les égalités suivantes :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{et} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Remarque : On peut visualiser par un diagramme de Venn : $A \cap (B \cup C)$



Visualisation : $A \cup (B \cap C)$



On peut démontrer ces deux égalités par une table de vérité !

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4.9 Produit cartésien de deux ensembles

Définition 17 : Soit E et F deux ensembles non vide. On appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble noté $E \times F$ composé des couples $(x\,;\,y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

Lorsque $F = E$, ce produit est noté E^2

Exemple : L'ensemble des couples réels $(x\,;\,y)$ est noté $\mathbb{R}^2$. On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x\,;\,y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x\,;\,y)$.

Remarque : Il revient au même d'écrire :

$$\text{« } \forall x \in E, \forall y \in F \text{ » que « } \forall (x;y) \in E \times F \text{ ».}$$