Compléments sur le calcul algébrique

Table des matières

1 Second degré : somme et produit des racines

1.1 Somme et produit des racines

Propriété 1 : Si un trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines, alors la somme S et le produit P des racines sont égales à :

$$S = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{c}{a}$$

1.2 Applications

1.2.1 Racine évidente

1) Résoudre l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

- $x_1 = 1$ est racine évidente car la somme des coefficients est nulle
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = \dfrac{3}{2}$, $S = \left\{1\,;\,\dfrac{3}{2}\right\}$

2) Résoudre l'équation : $5x^2 + 2x - 3 = 0$

- $x_1 = -1$ est racine évidente car la somme des coefficients extrêmes vaut celui du milieu.
- $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{5}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = \dfrac{3}{5}$, $S = \left\{-1\,;\,\dfrac{3}{5}\right\}$

1.2.2 Signe des racines

Dans une équation paramétrique, dans le cas ou $\Delta > 0$, on ne connaît pas la forme explicite des racines. Si l'on souhaite connaître le signe des racines, on retiendra :

- $P < 0$: deux racines de signes contraires.
- $P > 0$ et $S > 0$: deux racines positives.
- $P > 0$ et $S < 0$: deux racines négatives.

1.2.3 Système

Soit le système suivant : $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$

Ce système est symétrique, car on peut intervertir x et y sans que cela ne change le système. Cela veut dire que si le couple (a, b) est solution alors le couple (b, a) l'est également.

Ce système revient à résoudre une équation du second degré où x et y seront les solutions de cette équation. S représente la somme des racines et P leur produit. On doit donc résoudre :

$$X^2 - SX + P = 0$$

Exemple : Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$

x et y sont donc les racines de : $X^2 - 18X + 65 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = 18^2 - 4 \times 65 = 64 = 8^2$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines :

$$X_1 = \frac{18+8}{2} = 13 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{18-8}{2} = 5$$

Les solutions du système sont donc : $S = \{(13,5)\ ;\ (5,13)\}$

⚠ On pourrait retrouver ce résultat graphiquement par l'intersection de la droite $y = 18 - x$ et de l'hyperbole $y = \dfrac{65}{x}$

2 Équation irrationnelle

2.1 Équation du type $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$.

Propriété 2 : L'équation $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$ est définie, si et seulement si :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

On en déduit alors l'ensemble de définition D_f de l'équation.

On élève ensuite au carré, en remarquant qu'il y a équivalence que si $x \in D_f$

Exemples :

1) Résoudre : $\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}$

- On détermine l'ensemble de définition D_f

$$\begin{cases} 4x - 1 \geqslant 0 \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{4} \\ x \leqslant 3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D_f = \left[\frac{1}{4}\ ;\ 3\right]$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et $4x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$

$$\frac{4}{5} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$$

2) Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$

- L'ensemble de définition de l'équation vérifie : $\begin{cases} x + 12 \geqslant 0 \\ x^2 + 2x - 8 \geqslant 0 \end{cases}$

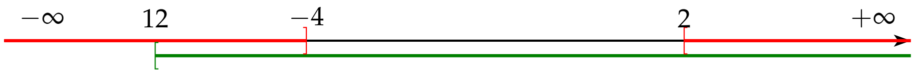
  La première inéquation ne pose pas de problème. Il faut déterminer les racines de la deuxième : $x^2 + 2x - 8 \geqslant 0$

  $x_1 = 2$ racine évidente car $2^2 + 2 \times 2 - 8 = 0$

  le produit des racine $P = -8$, donc $x_2 = -4$

  Comme on veut que la quantité soit positive ou nulle et que $a = 1$, on prend à l'extérieur des racines $]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$

Le système devient alors : $\begin{cases} x \geqslant -12 \\ x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[\end{cases}$



L'ensemble de définition est donc : $D_f = [-12\,; -4] \cup [2\,; +\infty[$

- On élève au carré : $x \in D_f$, $x + 12 = x^2 + 2x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - x + 20 = 0$

  On calcule : $\Delta = 1 + 80 = 81 = 9^2$, $\quad \Delta > 0$, on a deux racines :

$$x_1 = \frac{1+9}{-2} = -5 \in D_f \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-9}{-2} = 4 \in D_f \quad \text{donc} \ \ S = \{-5\,;\,4\}$$

2.2 Équation du type $\sqrt{A(x)} = B(x)$

Propriété 3 : L'équation $\sqrt{A(x)} = B(x)$ est définie, si et seulement si :

$$A(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geqslant 0$$

Cependant la première condition est superflue. Si on élève au carré l'équation, on obtient : $A(x) = [B(x)]^2$

Si cette égalité est vérifiée alors $A(x)$ est nécessairement positif ou nul.

L'équation est donc équivalente à : $B(x) \geqslant 0 \quad$ et $\quad A(x) = [B(x)]^2$

Exemples :

1) Soit l'équation suivante : $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$

- On détermine l'ensemble de définition :

$$x + 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad D_f = [-2; +\infty[$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et

$$x^2 - 1 = (x+2)^2 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 \ \Leftrightarrow \ -4x = 5 \ \Leftrightarrow \ x = -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{5}{4} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

2) Soit l'équation suivante : $\sqrt{4 - x} = x - 2$

- On détermine l'ensemble de définition :

$$x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad D_f = [2; +\infty[$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et

$$4 - x = (x-2)^2 \ \Leftrightarrow \ 4 - x = x^2 - 4x + 4 \ \Leftrightarrow \ x(x-3) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \ \text{ou} \ x = 3$$

$$0 \notin D_f \ \text{et} \ 3 \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \{3\}$$

3 Système linéaire 3 x 3 ou plus . Pivot de Gauss

Pour résoudre un système d'équation, l'idée générale est d'**éliminer** petit à petit le nombre d'inconnues par combinaison linéaire des lignes du système pour obtenir un système équivalent plus simple.

Selon l'outil dont on dispose, les préoccupations seront différentes :

- **Résolution par une calculatrice ou par un ordinateur :**
  Peu importe la complexité des calculs, seul compte la rapidité des calculs. On privilégie les algorithmes qui fonctionne à tout coup et, parmi ceux-ci les plus courts. Le pivot de Gauss est un bon candidat.
- **Résolution « manuelle » :**
  Il n'y a pas de méthode privilégiée, seule la simplicité compte. Il faut alors anticiper pour éviter les calculs trop complexes.

3.1 Conventions

Comme l'on passe d'un système (S) à un système (S') équivalent par combinaison de lignes, on adoptera les conventions suivantes :

opération élémentaire	**codage**
Échange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
Multiplication de la ligne i par α ($\alpha \neq 0$)	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
Addition de la ligne i d'un multiple de la ligne j	$L_i \leftarrow \alpha L_i + \lambda L_j$

3.2 Le pivot de Gauss

Propriété 4 : Il s'agit par étapes successives de transformer un système (S) en un **système triangulaire** (S') qui lui est équivalent.

On appelle les variables : $x_1, x_2, \dots x_n$.

- On place en L_1 une ligne où le coefficient de x_1 est non nul. Ce coefficient est appelé pivot (il est préférable que ce coefficient soit égal à 1).
  On élimine l'inconnue x_1 dans $L_2, L_3, \dots, L_n$ par une combinaison linéaire de L_i et L_1.
- S'il existe parmi $L_2, L_3, \dots, L_n$ une ligne où le coefficient de x_2 est non nul, on la place dans L_2 et on utilise ce coefficient comme nouveau pivot (il est préférable que ce coefficient soit égal à 1).
  On élimine l'inconnue x_2 dans $L_3, L_4, \dots, L_n$ par une combinaison linéaire de L_i et L_2.
- On réitère ce procédé jusqu'à obtenir un système triangulaire.

3.2.1 Exemple avec un système 3 x 3

Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{r} 9x-3y+3z=0 \\ -5x+y-6z=-1 \\ x+y+z=10 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{r} 9x-3y+3z=0 \\ -5x+y-6z=-1 \\ x+y+z=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{r} 1x+y+z=10 \\ 9x-3y+3z=0 \\ -5x+y-6z=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 9L_1-L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_1+L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 12y+6z=90 \\ 6y-z=49 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \left\{\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 2y+z=15 \\ 6y-z=49 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_2-L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 2y+z=15 \\ 4z=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{l} z=-1 \\ y=\dfrac{15-z}{2}=8 \\ x=10-y-x=3 \end{array}\right.$$

L'ensemble solution est : $S\,\{(3\,;\,8\,;-1)\}$

3.2.2 Exemple avec un système 4 x 4

Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} 2a+b-\;c-\;d=-18 \\ a+b+\;c+\;d=0 \\ 3a\quad\;+5c\quad\;=1 \\ a+\;b-7c+13d=-40 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+b-\;c-\;d=-18 \\ a+b+\;c+\;d=0 \\ 3a\quad\;+5c\quad\;=1 \\ a+\;b-7c+13d=-40 \end{array}\right. \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ \\ \\ \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1a+b+\;c+\;d=0 \\ 2a+b-\;c-\;d=-18 \\ 3a\quad\;+5c\quad\;=1 \\ a+\;b-7c+13d=-40 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1-L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1-L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1-L_4 \end{array} \left\{\begin{array}{r} a+b+\;c+\;d=0 \\ b+3c+3d=18 \\ 3b-2c+3d=-1 \\ 8c-12d=40 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4 \end{array} \left\{\begin{array}{r} a+\;b+\;c+\;d=0 \\ 1b+3c+3d=18 \\ 3b-2c+3d=-1 \\ 2c-3d=10 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_2-L_3 \\ \\ \end{array} \left\{\begin{array}{r} a+b+\;c+\;d=0 \\ b+3c+3d=18 \\ 11c+6d=55 \\ 2c-3d=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_4 \\ L_4 \leftarrow L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{r} a+\;b+\;c+\;d=0 \\ b+3c+3d=18 \\ 1c-\dfrac{3}{2}d=5 \\ 11c+6d=55 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_3 - L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} a+b+\ \ c+\ \ d = 0 \\ b+3c+3d = 18 \\ c - \dfrac{3}{2}d = 5 \\ -\dfrac{21}{2}d = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_4 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ c = 5 \\ b = 18 - 3c = 3 \\ a = -b - c = -8 \end{array} \right.$$

L'ensemble solution est : $S\{(-8\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 0)\}$