Les symboles somme et produit

Table des matières

1 Le symbole somme Σ

1.1 Définition

Définition 1 : Soit (a_i) une suite de nombres réels ou complexes. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on définit la somme suivante par :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

Soit I un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, la somme de tous les termes a_i, i décrivant I sera notée $\sum\limits_{i \in \mathrm{I}} a_i$

Remarque :

- La variable k est une variable muette, c'est à dire qu'une fois la somme calculée, le résultat ne dépend plus de k. On peut donc lui donner le nom qu'on veut : i, j, k, etc. à exception des bornes de la somme, ici p et n : $\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = \sum\limits_{i=p}^{n} a_i = \sum\limits_{j=p}^{n} a_j$
- On retrouve cette variable muette, lorsque l'on veut calculer une somme à l'aide d'un algorithme. (boucle Pour)
- Lorsque les termes de la somme ne dépendent pas de la variable, on somme des termes constants donc : $\sum\limits_{k=0}^{n} 3 = \underbrace{3+3\cdots+3}_{n+1 \text{ termes}} = 3(n+1)$
- Si $\mathrm{I} = \{2;4;6\}$ alors $\sum\limits_{i \in \mathrm{I}} a_i = a_2 + a_4 + a_6$.

Exemples :

- $1+2+\cdots+n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$.
- $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.
- $1+2+2^2+\cdots+2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k$.
- $1+3+5+\cdots+(2n-1) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)$.

⚠ Ne pas confondre :

- $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k + n$ avec $\sum\limits_{k=1}^{n} k+1$ les parenthèses font toute la différence.
- $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{2k}$ $(n+1$ termes$)$ et $\sum\limits_{k=0}^{2n} 2^k$ $(2n+1$ termes$)$

Propriété 1 : Relation de Chasles et linéarité :

Relation de Chasles : $\sum\limits_{k=p}^{n} a_k = \sum\limits_{k=p}^{m} a_k + \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$

L'opérateur somme est linéaire : $\sum\limits_{k=p}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum\limits_{k=p}^{n} a_k + \beta \sum\limits_{k=p}^{n} b_k$.

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{2} a_k + \sum_{k=3}^{n} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3^k + 4k) = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 4\sum_{k=0}^{n} k$

1.2 Linéarité et changement d'indice

Propriété 2 : Changement d'indice.

L'expression à l'aide du symbole $\sum$ n'est pas unique. On peut écrire une somme avec des indices différents.
Les changements d'indices $k \to k+p$ (translation) $k \to p-k$ (symétrie) sont les plus fréquents :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=p-n}^{p-1} a_{p-k}$$

Exemples : Calculer la somme : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

- On utilise la linéarité : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$
- On effectue un changement d'indice sur la deuxième somme : $k \to k+1$:
  $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$.
- On sépare les termes différents : $\displaystyle S_n = \overbrace{1}^{k=1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{k=n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Pour $n \geqslant 2$, on considère la somme $\displaystyle S_n = \sum_{k=2}^{n+1} k\,2^{2k-1}$.

Faire une translation d'indice pour que la nouvelle variable varie entre 0 et $(n-1)$ et une symétrie d'indice pour que la nouvelle variable varie entre 2 et $(n+1)$.

- Pour la translation, il suffit de faire : $k \to k-2$, on a alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+2)\,2^{2(k+2)-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+2)\,2^{2k+3}$$

- Pour la symétrie, il faut déterminer le milieu : $\dfrac{2+(n+1)}{2} = \dfrac{n+3}{2}$.
  On effectue alors la symétrie $k \to n+3-k$, on a alors :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1}(n+3-k)2^{2(n+3-k)-1} = \sum_{k=2}^{n+1}(n+3-k)2^{2n+5-2k}$$

1.3 Sommes télescopiques

Théorème 1 : Sommes télescopiques

Soit une suite (a_n) une suite de nombres réels ou complexes, on a :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad p \leqslant n, \quad \sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$$

Remarque : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1}$

Démonstration : On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k)$

- On utilise la linéarité : $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} a_k$
- On effectue un changement d'indice sur la première somme : $k \to k+1$
$$S_n = \sum_{k=p+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=p}^{n} a_k$$
- On sépare les termes différents : $S_n = a_{n+1} + \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} a_k - \sum_{k=p+1}^{n} a_k - a_p = a_{n+1} - a_p$

Exemples : Les sommes télescopiques sont une méthode très efficace pour calculer la somme des termes d'une suite (u_n). Il s'agit de trouver une suite (v_n) pour que $u_n = v_{n+1} - v_n$. Ce n'est bien sûr pas toujours possible malheureusement.

Calculer les sommes suivantes :

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$: on décompose $\dfrac{1}{k(k+1)}$ en $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
- $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$: on décompose $k \times k!$ en $(k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$
$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1$$
- $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
$$\frac{a}{k(k+1)} - \frac{a}{(k+1)(k+2)} = \frac{a(k+2) - ak}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2a}{k(k+1)(k+2)}, \text{ on a } a = \frac{1}{2}$$
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + n + 2 - 2}{4(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

1.4 Sommes à connaître

Théorème 2 : Somme des entiers, des carrés, des cubes

Pour tout entier naturel n non nul, on a les relations suivantes :

- $S_1(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $S_2(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $S_3(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 8 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration : La première formule a été démontré en première en ordonnant la somme dans l'ordre croissant puis dans l'ordre décroissant. Les deux dernières formules ont été démontré en terminale par récurrence. Mais les démonstrations directes sont possibles à l'aide de sommes télescopiques. On pourrait généraliser ces démonstration aux somme des puissances p ième des entiers naturels.

- $S_1(n)$, on utilise la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2 - k^2] = (n+1)^2 - 1$

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2 - k^2] = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + 2k + 1 - k^2) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2S_1(n) + n$$

On en déduit que :

$$2S_1(n) + n = (n+1)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_1(n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $S_2(n)$, on utilise la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1$

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$
$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n$$

On en déduit que :

$$3S_2(n) + 3S_1(n) + n = (n+1)^3 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3S_2(n) = \left[(n+1)^3 - 1 - 3S_1(n) - n\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$S_2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right] = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $S_3(n)$, on utilise la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^4-k^4]=(n+1)^4-1$

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^4-k^4]=\sum_{k=1}^{n}(k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=4S_3(n)+6S_2(n)+4S_1(n)+n$$

On en déduit que :

$$4S_3(n)+6S_2(n)+4S_1(n)+n=(n+1)^4-1 \quad\Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned}4S_2(n)&=(n+1)^4-1-6S_2(n)-4S_1(n)-n\\&=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\\&=(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right]\\&=(n+1)(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1)\\&=(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

Théorème 3 : Somme géométrique

Pour tous naturels p et n tels que $p \leqslant n$
et pour tout réel ou complexe x tel que $x \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n}x^k=x^p\times\frac{1-x^{n+1-p}}{1-x}=\text{premier terme}\times\frac{1-x^{\text{Nbre de termes}}}{1-x}$$

Démonstration : Posons $S_n=\displaystyle\sum_{k=p}^{n}x^k$.

- On utilise une somme télescopique :

$$S_n-xS_n=\sum_{k=p}^{n}x^k-\sum_{k=p}^{n}x^{k+1}=\sum_{k=p}^{n}(x^k-x^{k+1})=x^p-x^{n+1}$$

- On factorise : $S_n(1-x)=x^p(1-x^{n+1-p}) \overset{x\neq1}{\Leftrightarrow} S_n=x_p\times\dfrac{1-x^{n+1-p}}{1-x}$

Exemple : $S=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}2^k=2^3\times\frac{1-2^{n-2}}{1-2}=2^3(2^{n-2}-1)=2^{n+1}-8$

Théorème 4 : Factorisation standard

Pour tout naturel n et pour tous réels ou complexes a et b, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k-1}\,b^k=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Démonstration : On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}\, b^k$, on a alors :

- $aS_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}\, b^k = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}\, b^k \overset{k\to k+1}{=} a_n + \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}\, b^{k+1}$
- $bS_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}\, b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}\, b^{k+1} + b^n$
- Par différence : $(a-b)S_n = a^n + \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}\, b^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}\, b^{k+1} - b^n = a^n - b^n$

1.5 Sommes doubles

Définition 2 : Lorsqu'on somme sur deux indices, on parle de somme double.

Soit (a_{ij}) une suite double de nombres réels ou complexes et soit deux entiers naturels n et p, on note :

- $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ somme des termes d'un tableau $n \times p$.
- $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ somme triangulaire d'un tableau n^2.
- $\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$ somme triangulaire sans la diagonale.

Remarque : On peut noter : $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij}$

On peut schématiser ces sommes double par un tableau double entrée.

$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} \Rightarrow$

$i \backslash j$	1	2	...	p	Total
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1p}	$\sum_{j=1}^{p} a_{1j}$
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2p}	$\sum_{j=1}^{p} a_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{np}	$\sum_{j=1}^{p} a_{nj}$
Tot.	$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{n} a_{ip}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}$ $\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \quad \Rightarrow$$

$i \backslash j$	1	2	...	n	Total
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$
2		a_{22}	...	a_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n				a_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}$
Tot.	$\sum_{i=1}^{1} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{2} a_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{n} a_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$

Pour $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$, il suffit d'enlever la diagonale du tableau (triangle supérieur).

Théorème 5 : Développement d'un produit de deux sommes

Soient $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_p$ nombres réels ou complexes, on a alors :

- $$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{j=1}^{p} b_j \times \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i\, b_j$$
- $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i\, b_j \quad \text{(carré d'une somme)}$$

Démonstration : La première formule est directement lié à la définition de la somme double.

Pour le carré d'une somme, on fait intervenir la symétrie du tableau double entrée en séparant la somme en trois parties (le triangle supérieur est identique au triangle inférieur) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij} = \overbrace{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}}^{\text{triangle supérieur}} + \overbrace{\sum_{1 \leqslant i = j \leqslant n} a_{ij}}^{\text{diagonale}} + \overbrace{\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij}}^{\text{triangle inférieur}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$$

Remarque : On retrouve avec le deuxième terme du carré d'une somme, le célèbre double produit de l'identité remarquable du second degré. Il s'agit ici d'une généralisation de cette identité remarquable à n termes.

Exemple : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

2 Le symbole produit Π

2.1 Définition

Définition 3 : Soit (a_i) une suite de nombres réels ou complexes. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on définit le produit suivant par :

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n$$

Soit I un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, la somme de tous les termes a_i, i décrivant I sera notée $\displaystyle\prod_{i \in \mathrm{I}} a_i$

Exemple : On peut utiliser le symbole Π pour définir « factorielle » d'un entier naturel n noté $n\,!$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Par convention, on posera $0\,! = 0$ et on retiendra la relation de récurrence définissant factorielle n : $n\,! = n(n-1)\,!$

⚠ Lorsqu'on fait les produits d'un terme constant, on obtient : $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} 5 = 5^{n+1-p}$

2.2 Relation produit - somme

Théorème 6 : Relation produit - somme

Soit (a_i) une suite de nombres réels strictement positifs. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on a alors :

$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln a_k$$

2.3 Produits télescopiques

Théorème 7 : Produits télescopiques

Soit une suite (a_n) une suite de nombres réels ou complexes, on a :

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ \ p \leqslant n,\ \ \prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

Exemple : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$