Fonctions : symétries et translations

Table des matières

1 Définition

1.1 Fonction numérique

Définition 1 : Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R} \text{ ou } D_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

⚠ Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un nombre réel.

Exemple : :

- $f(x) = 3x - 7$ $\quad f$ est une fonction affine (droite)
- $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ $\quad f$ est une fonction du second degré (parabole)
- $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$ $\quad f$ est une fonction homographique (hyperbole)
- $f(x) = e^{-x^2}$ $\quad$ fonction de Gauss (courbe en cloche)

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 : L'ensemble définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est définie

Exemple :

- Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4-x}$ a pour ensemble de définition : $D_f =]-\infty\,;\,4]$ $\quad (4 - x \geqslant 0)$
- Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x - 6}$ a pour ensemble de définition : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\,;\,6\}$ $\quad (x^2 - 5x - 6 \neq 0,\ x = -1$ racine évidente$)$
- Soit la fonction h définie par $h(x) = \ln(x+1)$ a pour ensemble de définition $D_h =]-1\,;+\infty[$ $\quad (x + 1 > 0)$

1.3 Comparaison de fonctions

Définition 3 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement si :

- Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$
- Pour tout $x \in D_f,\ f(x) = g(x)$

Exemple : Les fonction f et g définies ci-dessous, sont-elles égales ?

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Déterminons leur ensemble de définition :

- Pour f, on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3}\geqslant 0$, d'où $D_f=]-\infty\,;-3[\cup[1\,;+\infty[$
- Pour g, on doit avoir : $x-1\geqslant 0$ et $x+3>0$, d'où $D_g=[1\,;+\infty[$
- On a donc : $D_f\neq D_g$. Les fonction ne sont donc pas égales.

⚠ On remarquera cependant que sur $[1\,;+\infty[$, on a $f(x)=g(x)$

Définition 4 : Soit I un intervalle et soit f et g deux fonctions définies sur I.

On dit que sur I :

- $f\leqslant g \;\Leftrightarrow\; \forall x\in \mathrm{I},\; f(x)\leqslant g(x)$.
- $f\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x\in \mathrm{I},\; f(x)\geqslant 0$.
- f est **majorée** $\Leftrightarrow\; \exists\, M\in\mathbb{R},\; \forall x\in \mathrm{I},\; f(x)\leqslant M$.
- f est **minorée** $\Leftrightarrow\; \exists\, m\in\mathbb{R},\; \forall x\in \mathrm{I},\; m\leqslant f(x)$.
- f est **bornée** $\Leftrightarrow\; \exists\, m, M\in\mathbb{R},\; \forall x\in \mathrm{I},\; m\leqslant f(x)\leqslant M$.

Remarque : La relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale car deux fonctions ne sont pas toujours comparables.

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$. On a par exemple :

$$\frac{1}{2}>\left(\frac{1}{2}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; f\left(\frac{1}{2}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad 2<2^2 \;\Leftrightarrow\; f(2)<g(2)$$

Exemple :

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(1-x)$. Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

  On met la fonction sous la forme canonique :

  $$f(x)=-x^2+x=-(x^2-x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

  La parabole représentant f est tournée vers le bas et de sommet $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$.

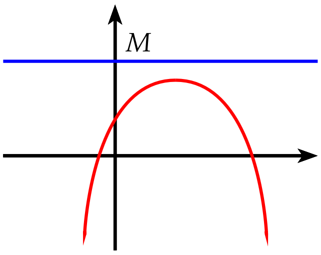
  La fonction f est donc majorée par $\dfrac{1}{4}$.

- Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$ est bornée.

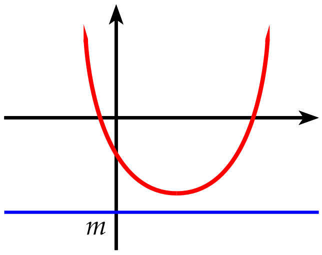
  On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

  $$-1\leqslant \sin x\leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; -4\leqslant 4\sin x\leqslant 4 \;\Leftrightarrow\; -7\leqslant 4\sin x-3\leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; -7\leqslant g(x)\leqslant 1$$

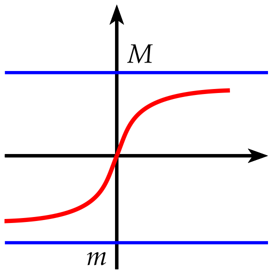
  g est donc bornée par $[-7\,;\,1]$.



f majorée



f minorée



f bornée

Propriété 1 : Si f une fonction est monotone sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\ ;\ b]$ alors f est bornée.

Démonstration : Supposons que f est croissante sur $[a\ ;\ b]$ (le cas f décroissante se traite de façon analogue).

Soit $x \in [a\ ;\ b]$, i.e. $a \leqslant x \leqslant b$, comme f est croissante, elle conserve la relation d'ordre, d'où $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. On peut prendre $m = f(a)$ et $M = f(b)$, f est donc bornée.

2 Parité d'une fonction

2.1 Fonction Paire

Définition 5 : On dit qu'une fonction f est paire sur D_f ssi l'on a :

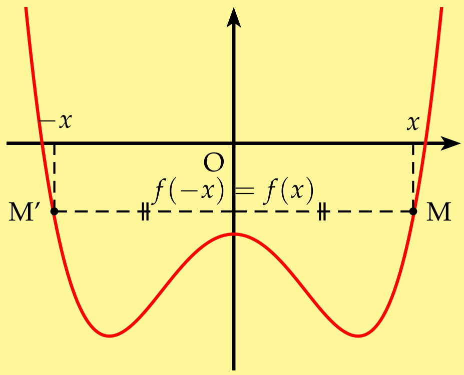
- Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x)$

Exemple : Les fonctions suivantes sont paires sur leur ensemble de définition :

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 5x^4 + 3x^2 - 1, \quad f_3(x) = \cos x, \quad f_4(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_5(x) = e^{-x^2}$$

Remarque : Le terme « pair » doit son nom au fait que les fonctions polynômes qui ne contiennent que des termes de puissances paires vérifient : $f(-x) = f(x)$

Propriété 2 : La représentation d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



2.2 Fonction impaire

Définition 6 : On dit qu'un fonction f est impaire si et seulement si l'on a :

- Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x)$

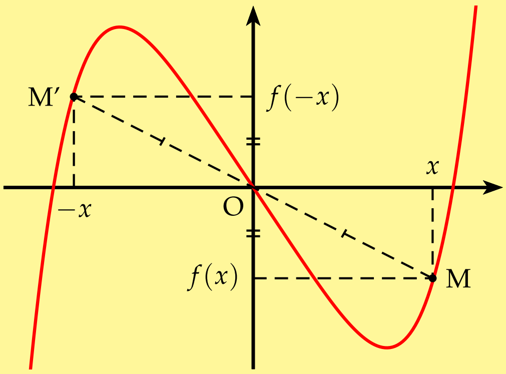
Exemples :

Les fonctions suivantes sont impaire sur leur ensemble de définition :

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \tan x, \quad f(x)_4 = \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = 4x^3 - 3x$$

Remarque : Le terme « impair » doit son nom au fait que les fonctions polynômes qui ne contiennent que des termes de puissances impaires vérifient : $f(-x) = -f(x)$

Propriété 3 : La représentation d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine**.



3 Autres symétries

3.1 Symétrie par rapport à un axe vertical

Théorème 1 : Soit $A(a\,;\,0)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Si un point M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(X\,;\,Y)$ dans un repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors, on a les relations :

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases}$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe $x = a$ si et seulement si la fonction g dont la courbe est $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est paire.

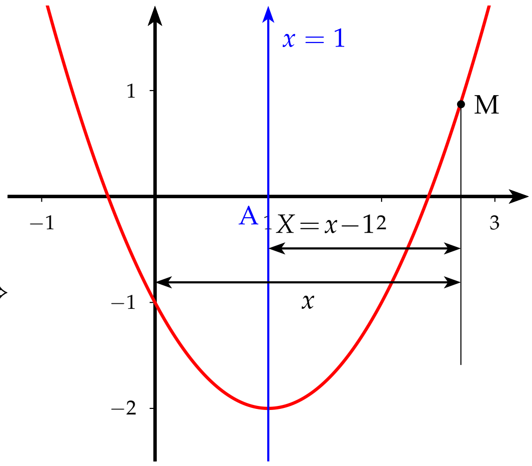
Remarque : On peut aussi montrer que $f(a+x) = f(a-x)$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 1$.

On change de repère passant de $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à $(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ g(X) = (X+1)^2 - 2(X+1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ g(X) = X^2 + 2X + 1 - 2X - 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ g(X) = X^2 - 2 \end{cases}$$



Comme la fonction carrée est paire, la fonction g est paire et donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $y = 1$.

Remarque : Autre méthode : $f(1+x) = f(1-x)$ en effet :

$$f(1+x) = (1+x)^2 - 2(1+x) - 1 = 1 + 2x + x^2 - 2 - 2x - 1 = x^2 - 2$$

$$f(1-x) = (1-x)^2 - 2(1-x) - 1 = 1 - 2x + x^2 - 2 + 2x - 1 = x^2 - 2$$

3.2 Symétrie par rapport à un point

Théorème 2 : Soit $\mathrm{I}(a\,;\,b)$ dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Si un point M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(X; Y)$ dans un repère $(\mathrm{I}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors, on a les relations

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\mathrm{I}(a\,;\,b)$ si et seulement si la fonction g dont la courbe est $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(\mathrm{I}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est impaire.

Remarque : On peut aussi montrer que $f(a+x) + f(a-x) = 2b$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ tel que $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\mathrm{I}(-1\,;\,2)$.

On change de repère passant de $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à $(\mathrm{I}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = f(x)-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ g(X) = \dfrac{2(X-1)-1}{X-1+1} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ g(X) = \dfrac{2X-3}{X} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X-1 \\ g(X) = \dfrac{2X-3-2X}{X} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ g(X) = -\dfrac{3}{X} \end{cases}$$

Comme la fonction inverse est impaire, la fonction g est impaire et donc la courbe de $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point I.

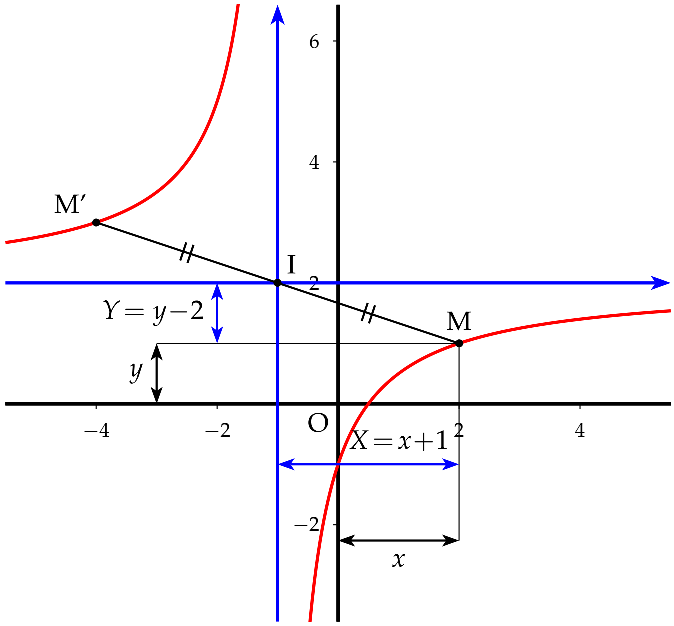
Remarque : Autre méthode :

$f(-1+x) + f(-1-x)$

$= \dfrac{2(-1+x)}{-1+x+1} + \dfrac{2(-1-x)}{-1-x+1}$

$= \dfrac{-2+2x}{x} - \dfrac{-2-2x}{x}$

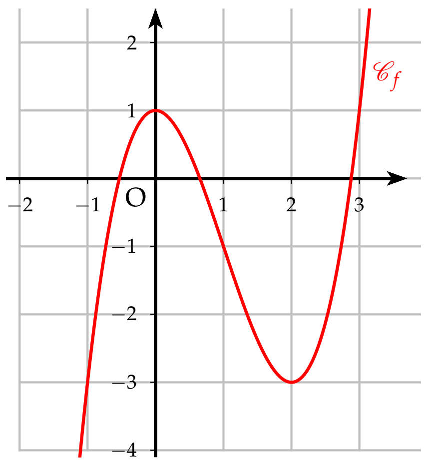
$= 4 = 2 \times 2$



3.3 Des représentations déduites par symétrie

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ représentée ci-dessous.

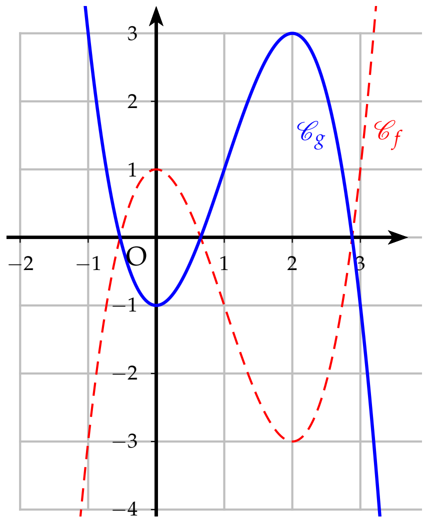
1) Déduire les courbes des fonctions g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :
   a) $g(x) = -f(x)$
   b) $h(x) = |f(x)|$
   c) $k(x) = f(-x)$
2) On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction F par : $F(x) = f(|x|)$.
   a) Démontrer que la fonction F est paire
   b) En déduire la représentation de F



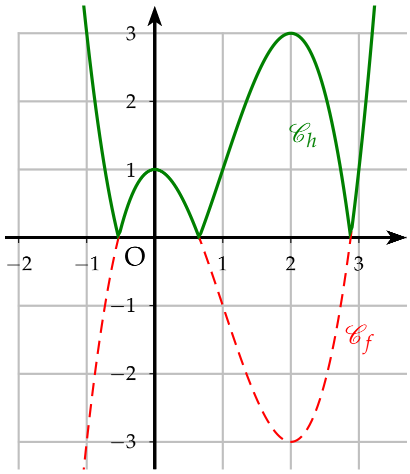
⇒ ⇒

1) a)

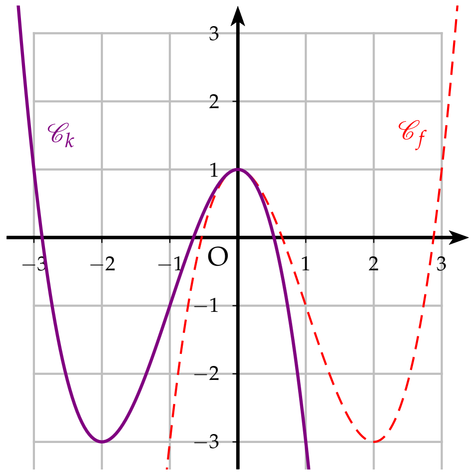
La courbe $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la **symétrie par rapport à l'axe des abscisses**.



b) On déduit la courbe $\mathscr{C}_h$ en faisant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses **uniquement** lorsque $f(x) < 0$.

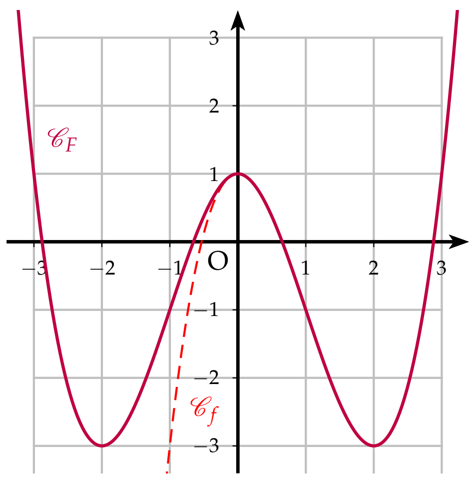


c) La courbe $\mathscr{C}_k$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées**.



2) a) On a pour tout x réel : $F(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = F(x)$
La fonction F est donc paire.

b) On déduit la courbe $\mathscr{C}_F$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ en faisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées uniquement si $x < 0$



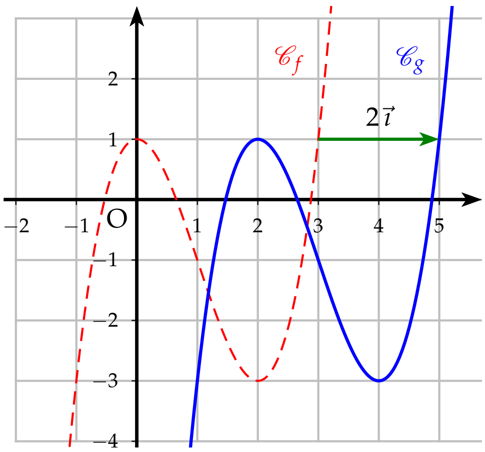
4 Translation

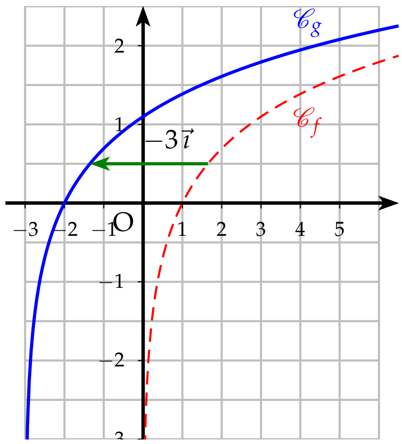
Théorème 3 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit les les fonction g et h, les fonctions définie respectivement sur J et I tel que J est l'intervalle I décalé vers la droite de a par :

$$g(x) = f(x-a) \qquad \text{et} \qquad h(x) = f(x) + b$$

On détermine les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ en faisant une translation de vecteurs respectifs $a\,\vec{\imath}$ et $b\,\vec{\jmath}$ de la courbe $\mathscr{C}_f$

4.1 Translations horizontales





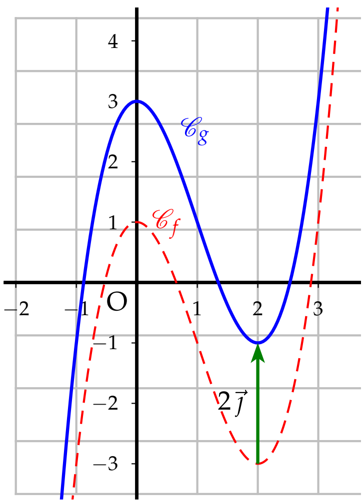
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

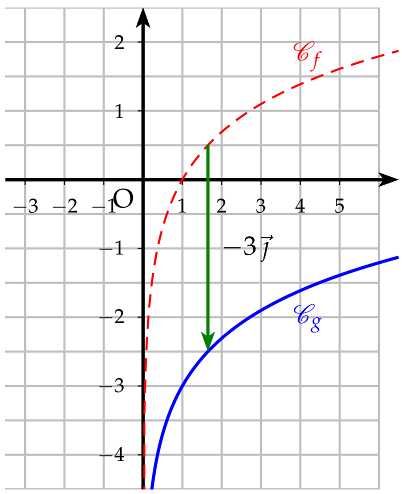
$g(x) = f(x-2) = (x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 1$

$f(x) = \ln x \quad D_f =]0\,;+\infty[$

$g(x) = f(x+3) = \ln(x+3) \quad D_g =]-3\,;+\infty[$

4.2 Translations verticales





$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$g(x) = f(x) + 2 = x^3 - 3x^2 + 3$

$f(x) = \ln x \quad D_f =]0\,;+\infty[$

$g(x) = f(x) - 3 = \ln x + 3 \quad D_g =]0\,;+\infty[$