Compléments sur les limites, asymptotes et continuité

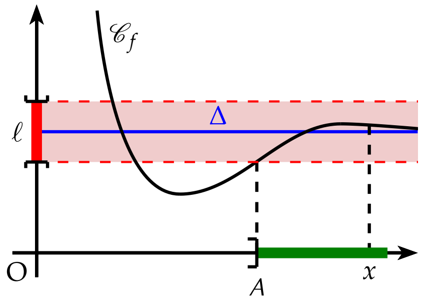
Table des matières

1 Limites finies ou infinies en l'infini

1.1 Limites finies à l'infini

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert centré en ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour les x d'un intervalle $]A; +\infty[$. A étant à déterminer.

On obtient une définition plus rigoureuse avec des quantificateurs :



Définition 1 : Soit une fonction f définie sur $D =]a\,; +\infty[$.

On écrira $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ si, et seulement si,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall x \in D,\ \ x > A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

« Pour tout réel positif ϵ (aussi petit soit-il), on peut trouver un réel positif A tel que pour tout x de D supérieur à A alors $|f(x) - \ell|$ est inférieur à ϵ ».

La droite Δ d'équation $y = \ell$ est dite **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

Exemple : Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$.

$$\left|\frac{2x-1}{x+1} - 2\right| = \left|\frac{2x-1-2x-2}{x+1}\right| = \left|\frac{-3}{x+1}\right| \leqslant \frac{3}{x} \quad \text{et} \quad \frac{3}{x} < \epsilon \ \Leftrightarrow\ x > \frac{3}{\epsilon}. \ \text{d'où}$$

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, A = \frac{3}{\epsilon},\ \forall x \in]0\,; +\infty[,\ \ x > A \ \Rightarrow\ \left|\frac{2x-1}{x+1} - 2\right| < \epsilon$$

Définition 2 : Soit une fonction f définie sur $D =]-\infty\,;\, b[$.

On écrira $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ si, et seulement si,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, B < 0,\ \forall x \in D,\ \ x < B \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

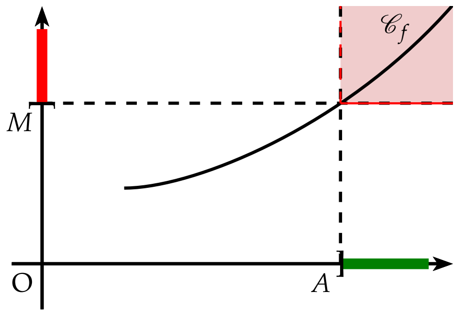
« Pour tout réel positif ϵ (aussi petit soit-il), on peut trouver un réel négatil B tel que pour tout x de D inférieur à B alors $|f(x) - \ell|$ est inférieur à ϵ ».

La droite Δ d'équation $y = \ell$ est dite **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$

1.2 Limites infinies en l'infini

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour $x \in]A;+\infty[$, A étant à déterminer.

On obtient une définition plus rigoureuse avec des quantificateurs :



Définition 3 : Soit une fonction f définie sur $D =]a\,;+\infty[$.

On écrira $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ si, et seulement si,

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall x \in D,\ \ x > A \ \Rightarrow\ f(x) > M$$

« Pour tout réel positif M (aussi grand soit-il), on peut trouver un réel positif A tel que pour tout x de D supérieur à A alors $f(x)$ est supérieur à M ».

Exemple : Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$. Soit $M > 0$.

$\ln x > M \quad\Rightarrow\quad x > e^M$, on a donc

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, A = e^M,\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ x > A \ \Rightarrow\ \ln x > M$$

Définition 4 : On définit de façon analogue :

- Soit une fonction f définie sur $D =]a\,;+\infty[$.

  On écrira $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ si, et seulement si,

  $$\forall\, m < 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall x \in D,\ \ x > A \ \Rightarrow\ f(x) < m$$

- Soit une fonction f définie sur $D =]-\infty\,;\,b[$.

  On écrira $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ si, et seulement si,

  $$\forall\, M > 0,\ \exists\, B < 0,\ \forall x \in D,\ \ x < B \ \Rightarrow\ f(x) > M$$

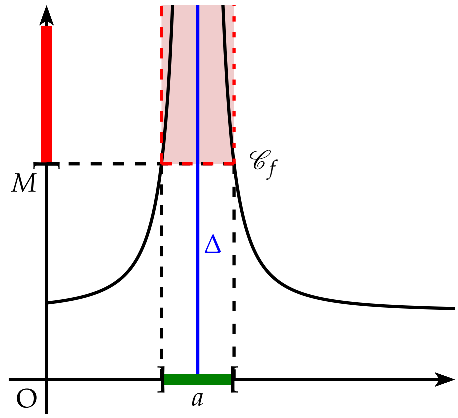
- Soit une fonction f définie sur $D =]-\infty\,;\,b[$.

  On écrira $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ si, et seulement si,

  $$\forall\, m < 0,\ \exists\, B < 0,\ \forall x \in D,\ \ x < B \ \Rightarrow\ f(x) < m$$

1.3 Limites infinies en un point

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a, signifie que tout intervalle $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a - c'est à dire pour les x d'un intervalle ouvert de rayon η contenant a. Le rayon η étant à déterminer



On obtient une définition plus rigoureuse avec des quantificateurs

Définition 5 : Soit une fonction f définie sur $D =]b\,;\,a[\cup]a\,;\,c[$.

On écrira $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$ si, et seulement si,

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall x \in D,\ \ |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > M$$

« Pour tout réel positif M (aussi grand soit-il), on peut trouver un réel positif η tel que pour tout x de D dans $]a-\eta\,;\,a+\eta[$ alors $f(x)$ est supérieur à M ».

La droite Δ d'équation $x = a$ est dite **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$ au point a.

Remarque : L'intervalle $D =]b\,;\,a[\cup]a\,;\,c[$ est appelé **voisinage** de a. La fonction f doit être définie dans un voisinage de a tout en étant non définie en a.

Exemple : Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{(x-1)^2} = +\infty$

Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on a $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2} \geqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et

$\dfrac{1}{(x-1)^2} > M \ \Leftrightarrow\ (x-1)^2 < \dfrac{1}{M} \ \Leftrightarrow\ |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, on a donc :

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, \eta = \frac{1}{\sqrt{M}},\ \forall x \in D,\ \ |x-1| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > M$$

Définition 6 : Soit une fonction f définie sur $D =]b\,;\,a[\cup]a\,;\,c[$.

On écrira $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$ si, et seulement si,

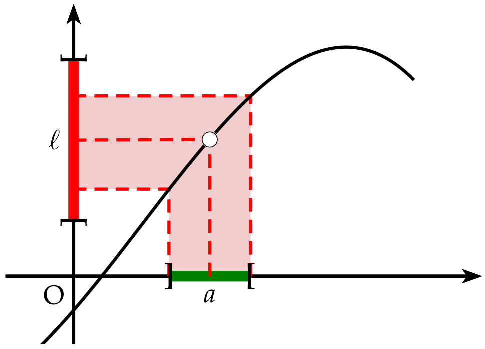
$$\forall\, m < 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall x \in D,\ \ |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) < m$$

« Pour tout réel négatif m (aussi grand négatif soit-il), on peut trouver un réel positif η tel que pour tout x de D dans $]a-\eta\,;\,a+\eta[$ alors $f(x)$ est inférieur à m ».

La droite Δ d'équation $x = a$ est dite **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$ au point a.

1.4 Limite finie en un point

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en a, signifie que tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a - c'est à dire pour les x d'un intervalle ouvert de rayon η contenant a. Le rayon η étant à déterminer.
On obtient une définition plus rigoureuse avec des quantificateurs



Définition 7 : Soit une fonction f définie sur $D =]b\,;\,a[\cup]a\,;\,c[$.
On écrira $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ si, et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

« Pour tout réel positif ϵ (aussi petit soit-il), on peut trouver un réel positif η tel que pour tout x de D dans $]a - \eta\,;\,a + \eta[$ alors $|f(x) - \ell|$ est inférieur à ϵ ».

1.5 Limites à droite, à gauche

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur un voisinage D de a. On dit que f admet une limite :

- A droite de a, notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^+} f$, si et seulement si :

  limite finie ℓ : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ a < x < a + \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$
  limite $+\infty$: $\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ a < x < a + \eta \ \Rightarrow\ f(x) > M$
  limite $-\infty$: $\forall m < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ a < x < a + \eta \ \Rightarrow\ f(x) < m$

- A gauche de a, notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^-} f$, si et seulement si :

  limite finie ℓ : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ a - \eta < x < a \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$
  limite $+\infty$: $\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ a - \eta < x < a \ \Rightarrow\ f(x) > M$
  limite $-\infty$: $\forall m < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ a - \eta < x < a \ \Rightarrow\ f(x) < m$

Exemple : Soit f définie sur $D =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$.
Déterminer la limite à droite et à gauche de f au point 1.

- Pour $x > 1$ et $M > 0$, $\dfrac{3}{x-1} > M \ \Leftrightarrow\ x - 1 < \dfrac{3}{M} \ \Leftrightarrow\ x < 1 + \dfrac{3}{M}$, d'où :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta = \frac{3}{M},\ \forall x \in D,\ 1 < x < 1 + \eta \ \Rightarrow\ f(x) > M$$

- Pour $x < 1$ et $m < 0$, $\quad \dfrac{3}{x-1} < m \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 > \dfrac{3}{m} \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 + \dfrac{3}{m}$, d'où :

$$\forall\, m < 0,\ \exists\, \eta = -\frac{3}{m},\ \forall x \in D,\ 1-\eta < x < 1 \ \Rightarrow\ f(x) < m$$

- On en déduit alors : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

2 Limite en l'infini des polynômes et fonctions rationnelles

2.1 Limite en l'infini d'un polynôme

Théorème 1 : Un polynôme a même limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que son monôme du plus haut degré.

$$\text{Si} \quad P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

Démonstration : On met en facteur le monôme du plus haut degré, $a_n \neq 0$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-i}}\right)$$

or $\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-i}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{n-i}} = 0$, d'où par somme et produit :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

Exemple : Limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynôme P tel que : $P(x) = 4x^3 + 2x^2 + 4$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$

2.2 Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Théorème 2 : Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus degré de son numérateur sur celui de son dénominateur.

$$\text{Si} \quad f(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Démonstration : On met en facteur les monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur, $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$

$$f(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} = \frac{a_n x^n \left(1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-i}}\right)}{b_m x^m \left(1 + \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \frac{b_j}{b_m} \times \frac{1}{x^{m-j}}\right)}$$

- $\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!],\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-i}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{n-i}} = 0,$
- $\forall j \in [\![0\,;\,m-1]\!],\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{m-j}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{m-j}} = 0,$

par somme, produit, quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Exemple :

- Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

- Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{4x^2 + 3x - 5}{3x^2 - 1}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

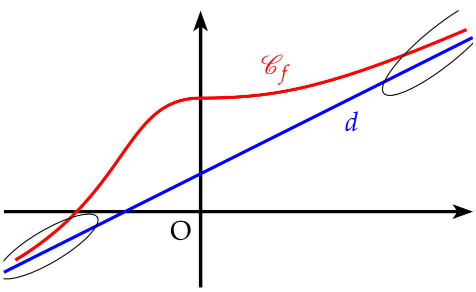
3 Asymptote oblique

Définition 9 : Une courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ ou en $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Remarque : La courbe se rapproche de plus en plus de la droite asymptote lorsque x devient de plus en plus grand soit en valeur positive soit en valeur négative.

Exemple : On obtient la courbe $\mathscr{C}_f$ et son asymptote d suivantes :



Théorème 3 : Dans une fonction rationnelle f, lorsque le degré du polynôme du numérateur n et celui de son dénominateur m sont tels que $n = m+1$, alors la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d en $+\infty$ et $-\infty$.

Soit $\quad f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \quad$ et $\quad d^\circ P = d^\circ Q + 1$

Soit la droite d d'équation $y = ax+b \quad$ alors $\quad \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x+1}$

Déterminer l'asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. On précisera de plus la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Le numérateur de la fonction f est de degré 2 et celui de son dénominateur est de degré 1, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour déterminer cette asymptote, il faut décomposer f en éléments simples. Déterminons les coefficient a, b et c tel que : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

Il y a deux méthode pour déterminer ces coefficients.

- 1re méthode : par identification

  On réduit la deuxième forme au même dénominateur puis on identifie à la première forme.

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

  Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a=2 \\ a+b=-3 \\ b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=6 \end{cases} \quad \text{soit} \quad f(x) = 2x-5+\frac{6}{x+1}$$

- 2e méthode : par division euclidienne

  On effectue une division en base x. On a alors :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2x & 2x-5 \\ \cline{1-1} 0x^2-5x+1 & \\ +5x+5 & \\ \cline{1-1} 0x+6 & \end{array}$$

  On a alors : $f(x) = 2x-5+\dfrac{6}{x+1}$

Montrons maintenant que la droite d'équation $y = 2x-5$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$. On calcule : $f(x)-(2x-5) = \dfrac{6}{x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \quad \text{donc par quotient} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \quad \text{donc par quotient} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x+1} = 0, \text{ d'où}$$

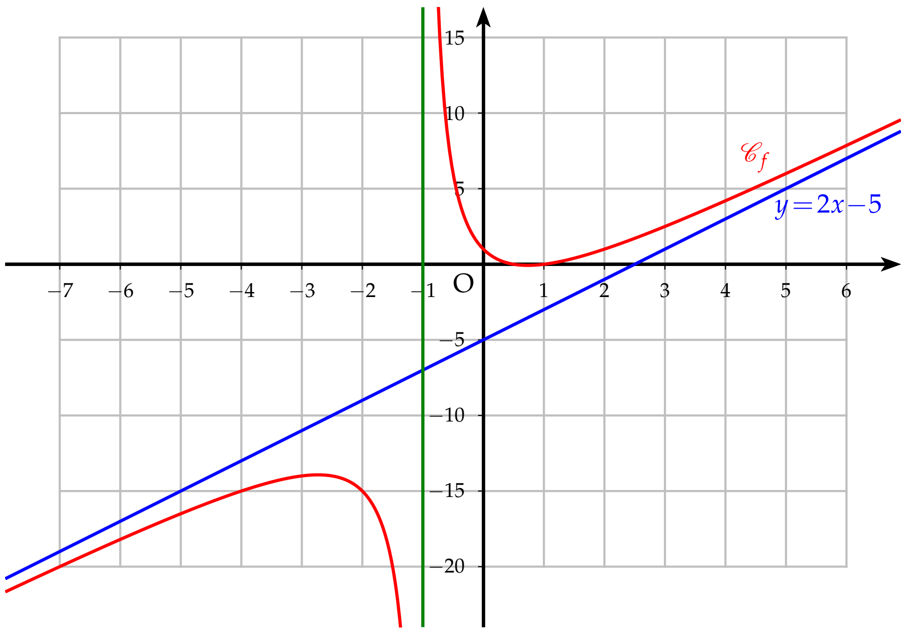
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(2x-5)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x)-(2x-5)] = 0$$

La droite d'équation $y = 2x-5$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Déterminons le signe de $f(x)-(2x-5) = \dfrac{6}{x+1}$ pour connaître la position de l'asymptote par rapport à la courbe. Le signe de $\dfrac{6}{x+1}$ est du signe de $x+1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-(2x-5)$		$-$	0	$+$	

La courbe est au dessus de l'asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.
On obtient la courbe suivante :



4 Limites indéterminées avec des radicaux

4.1 Une simple indétermination

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}+x$

1) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ puis conjecturer une asymptote oblique Δ en $+\infty$.
   b) Démontrer cette conjecture.

1) Le premier terme $\sqrt{x^2+1}$ tend vers $+\infty$ tandis que le deuxième x tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ $(+\infty - \infty)$

Pour lever l'indétermination, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

Il suffit alors de déterminer la limite de ce dénominateur pour trouver la limite de la fonction f en $-\infty$

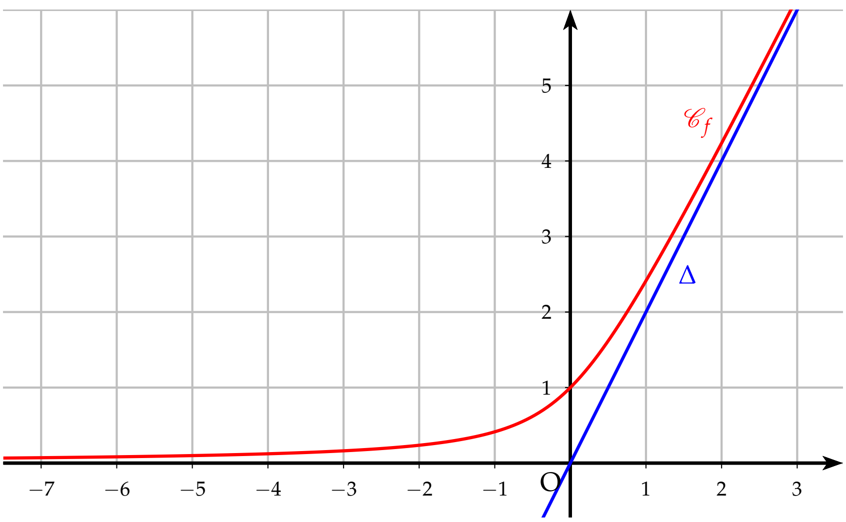
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$

Par quotient, on a alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Remarque : La courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2) a) À l'aide d'une calculette on peut visualiser la courbe $\mathscr{C}_f$. D'après l'allure de la courbe, on peut conjecturer que la courbe admet la droite Δ d'équation $y = 2x$ comme asymptote oblique comme le montre la graphique suivant :



b) La fonction f tend manifestement vers $+\infty$ en $+\infty$ car somme de deux termes qui tendent vers $+\infty$. Pour montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, étudions la limite en $+\infty$ de la quantité $f(x) - 2x$.

$$\forall x > 0,\;\; f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} + x - 2x = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)$$
$$= \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$= \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} > 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1\\ &\lim_{x\to 1}\sqrt{x} = 1\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&\text{Par composition et somme}\\ &\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1 = 2\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ par produit et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$

La droite Δ d'équation $y = 2x$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite Δ car la quantité $f(x) - 2x$ est positive pour x positif.

4.2 Une double indétermination

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty;[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$

Le premier terme $\sqrt{x^2+2x}$ tend vers $+\infty$ tandis que le deuxième $-x$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ $(+\infty - \infty)$

- Pour lever la première indétermination, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

Remarque : On observe une deuxième indétermination car le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux l'infini. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

- Pour lever cette deuxième indétermination, il faut mettre en facteur le terme prépondérant du dénominateur.

$\sqrt{x^2+2x} + x = |x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} + x$, on a alors :

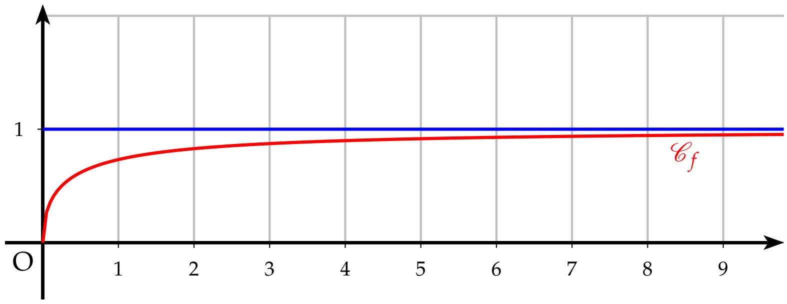
$$\forall x > 0,\;\; f(x) = \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x} = \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

Il suffit de déterminer la limite de ce dénominateur pour trouver la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition et somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1=2\end{array}$$

Par quotient, on a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Remarque : La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$



5 Continuité

5.1 Définition

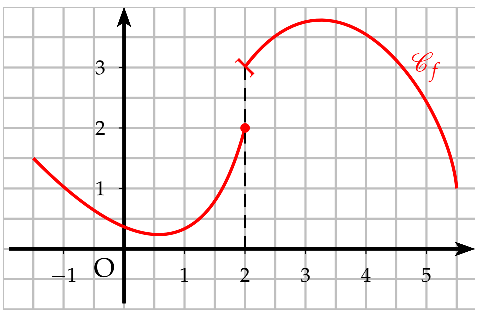
Définition 10 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I. On dit que la fonction f est **continue** en a si et seulement si :

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x\in I,\ \ |x-a|<\eta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\epsilon$$

$$\text{soit}\quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

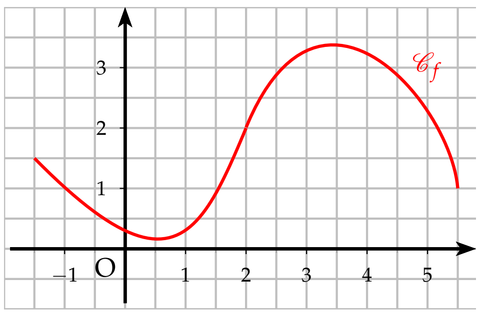
La fonction f est **continue sur un intervalle I** si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit grossièrement par une courbe "*en un seul morceau*".



Fonction f discontinue en 2

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3\neq f(2)$



Fonction f continue sur $[-1,5\,;\,5,5]$

- La fonction de gauche représente une discontinuité par "*saut*". C'est le cas par exemple de la fonction partie entière ou plus pratiquement de la fonction qui représente les tarifs postaux en fonction du poids (brusque changement de tarif entre les lettres en dessous de 20 g et de celles entre 20 g et 50 g).

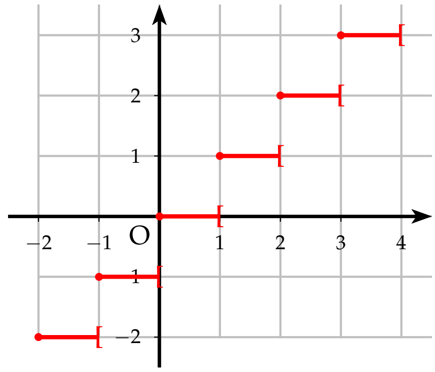
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ \ n \leqslant x < n+1$

La **fonction partie entière** E est alors définie par : $E(x) = n$

$E(2,4) = 2\ ;\ E(5) = 5\ ;\ E(-1,3) = -2$

On observe alors un "*saut*" de la fonction pour chaque entier. La fonction partie entière n'est donc pas continue pour x entier.

$$\exists\, \epsilon = \frac{1}{3},\ \forall \eta > 0,\ \forall x \in I,$$
$$|x - n| < \eta \ \Rightarrow\ |E(x) - E(n)| < \epsilon$$

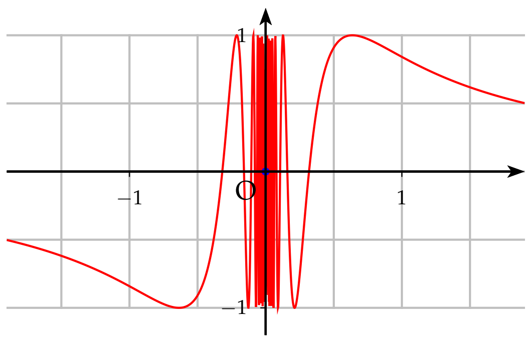


- D'autres discontinuités existent :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sin \dfrac{1}{x} \ \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue en 0 bien qu'on n'observe ici aucun "*saut*". La fonction oscille de plus en plus autour de 0 si bien qu'au voisinage de 0, la fonction tend vers une oscillation infinie qui explique la non continuité.



5.2 Règles opératoires

Théorème 4 : Règles opératoires sur les fonctions continues.

- Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit λ un réel. Les fonctions $f+g,\ \lambda f,\ fg$ sont alors continues sur I.
- Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I, et g non nul sur I. Les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont alors continues sur I.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et g une fonction continue sur un intervalle ouvert J contenant $f(\mathrm{I})$. La fonction $g \circ f$ est alors continue sur I.

Démonstration :

- Somme de deux fonctions.

f est continue en un point a de I, donc pour tout réel positif ϵ,

$$\exists\, \eta_1 > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ |x-a| < \eta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

g est continue en un point a de I, donc pour tout réel positif ϵ,

$\exists\, \eta_2 > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ |x-a| < \eta_2 \ \Rightarrow\ \ |g(x) - g(a)| < \dfrac{\epsilon}{2}$

On pose $\ \eta = \min(\eta_1, \eta_2),\ $ donc

$\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ |x-a| < \eta \ \Rightarrow$

$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$f + g$ est continue en tout point a de I, donc $f + g$ est continue sur I.

- Produit par un scalaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

  f est continue en un point a de I, donc pour tout réel positif ϵ,

  $\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ \ |f(x) - f(a)| < \dfrac{\epsilon}{|\lambda|+1}$

  $\Rightarrow\ \ |\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \times |f(x) - f(a)| < |\lambda| \times \dfrac{\epsilon}{|\lambda|+1} < \epsilon$

  λf est continue en tout point a de I, donc λf est continue sur I.

- Produit de deux fonctions.

Lemme 1 : Si une fonction g est continue en un point a d'un intervalle ouvert I, alors il existe un voisinage v de a sur lequel la fonction g est bornée.

Démonstration : du Lemme

Soit $\epsilon = 1$, comme g est continue en un point a de I :

$\exists\, \eta_0 > 0,\ \ |x-a| < \eta_0 \ \Rightarrow\ \ |g(x) - g(a)| < 1$

Pour le voisinage de a, $\ v =]a-\eta_0\,;\, a+\eta_0[,\ $ on a : $\ g(a)-1 < g(x) < g(a)+1$.

La fonction g est donc bornée sur un voisinage v de a. Fin du Lemme.

Changeons la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(a)g(a) &= f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a) \\ &= [f(x) - f(a)]\, g(x) + f(a)\, [g(x) - g(a)] \quad (1) \end{aligned}$$

On pose : $\ M = \max(|g(a)-1|\,, |g(a)+1|)$. Pour tout réel positif ϵ,

comme f est continue en a,

$\exists\, \eta_1 > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ |x-a| < \eta_1 \ \Rightarrow\ \ |f(x) - f(a)| < \epsilon$

comme g est continue en a,

$\exists\, \eta_2 > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ |x-a| < \eta_2 \ \Rightarrow\ \ |f(x) - f(a)| < \epsilon$

On pose $\ \eta = \min(\eta_0\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2)$, on a alors :

$\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ |x-a| < \eta \ \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(a)g(a)| &\overset{(1)}{\leqslant} |f(x)-f(a)| \times |g(x)| + |f(a)| \times |g(x)-g(a)| < \epsilon M + |f(a)|\epsilon \\ &< \epsilon\,(M + |f(a)|) \end{aligned}$$

fg est continue en tout point a de I, donc fg est continue sur I.

- Inverse d'une fonction.

Lemme 2 : Si une fonction g est continue et non nul en un point a d'un intervalle ouvert I, alors la fonction g est non nul sur un voisinage v de a.

Démonstration : du Lemme

Supposons $g(a) > 0$ (démonstration analogue pour $g(a) < 0$

Soit $\epsilon = \dfrac{g(a)}{2}$, comme g est continue en a, alors

$$\exists\, \eta_0 > 0,\ |x-a| < \eta_0 \ \Rightarrow\ |g(x)-g(a)| < \epsilon \ \Rightarrow\ |g(x)-g(a)| < \frac{g(a)}{2}$$
$$\Rightarrow\ \frac{g(a)}{2} < g(x) < \frac{3g(a)}{2} \quad (2)$$

Comme $g(a) \neq 0$, pour le voisinage de a, $v =]a-\eta_0\,;\ a+\eta_0[$, on a : $g(x) \neq 0$

Pour tout réel positif ϵ, comme la fonction g est continue :

$\exists\, \eta_1 > 0,\ |x-a| < \eta_1 \ \Rightarrow\ |g(x)-g(a)| < \epsilon$

On pose $\eta = \min(\eta_0\,,\ \eta_1)$, donc :

$$\exists\, \eta > 0,\ |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| < \epsilon \ \Rightarrow\ \frac{|g(x)-g(a)|}{|g(x)||g(a)|} \overset{(2)}{\leqslant} \frac{2\epsilon}{g^2(a)}$$

$\dfrac{1}{g}$ est continue en tout point a de I, donc $\dfrac{1}{g}$ est continue sur I.

- Quotient de deux fonctions.

  La démonstration découle du produit de deux fonctions et de l'inverse d'une fonction.

- Composée de deux fonctions.

  Soit un réel positif ϵ, comme la fonction g est continue en $f(a)$,

  $\exists\, \eta_1 > 0,\ \forall y \in \text{J},\ |y - f(a)| < \eta_1 \ \Rightarrow\ |g(y) - g\,[f(a)]\,| < \epsilon \quad (1)$

  Comme la fonction f est continue en a,

  $\exists\, \eta > 0,\ \forall x \in \text{I},\ |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \eta_1 \quad (2)$

  de (1) et (2) : $\exists\, \eta > 0,\ \forall x \in \text{I},\ |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ |g\,[f(x)] - g\,[f(a)]\,| < \epsilon$

  $g \circ f$ est continue en tout point a de I, donc $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple : Continuité de la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2(x-1)}{x^2+1}\right)$

Posons $g(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x^2+1}$. On vérifie facilement que sur $]1\,;+\infty[$, la fonction g est positive et continue (fonction rationnelle).

Par composition avec la fonction ln continue sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue sur $]1\,;+\infty[$.

5.3 Conséquences

Théorème 5 : D'après les règles opératoires sur la continuité,

- Tout polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle ouvert contenu dans son ensemble de définition.

Démonstration :

- Soit le polynôme P tel que $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$

  La fonction identité, $x \mapsto x$, est continue sur $\mathbb{R}$, par produit par elle-même,
  $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\quad x \mapsto x^i$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  Par produit par le scalaire a_i,
  $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\quad x \mapsto a_i\, x^i$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  Enfin par somme, $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ est continue sur $\mathbb{R}$

- Soit la fonction rationnelle f tel que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

  Par quotient de deux polynômes P et Q – non nul sur un intervalle ouvert I contenu dans l'ensemble de définition de f, la fonction f est continue sur I.