# La fonction puissance et la racine n-ième

## Table des matières

# 1 Fonction puissance

## 1.1 Définition

**Définition 1 :** On appelle fonction puissance d'un réel $a$ positif, la fonction $f_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad a > 0 \qquad f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$

**Exemple :** $3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 3}$ et $5^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\ln 5}$

**Remarque :** Il s'agit de la généralisation de la fonction puissance que l'on avait définie avec les entiers relatifs aux nombres réels . Cette généralisation se fait au détriment de l'ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$ pour $a$. En effet, on peut définir la **puissance entière** d'un réel négatif ou nul mais la **puissance réelle** n'est pas définie pour toute valeur de $a$ en raison de $\ln a$ qui est défini sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(-3)^5$ existe mais $(-3)^{\sqrt{2}}$ n'existe pas !

**Conséquence** La fonction puissance est strictement positive en raison de sa notation exponentielle.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ a^x > 0$$

## 1.2 Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés de la fonction exponentielle :

**Propriété 1 :** Pour tous réels positifs $a$ et $b$, on a les égalités suivantes pour $x$ et $y$ réels :

- $\ln a^x = x \ln a$
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$ $\qquad b^x$
- $(ab)^x \quad = \quad a^x \ \times$

## 1.3 Applications

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\quad 2^x = 3^{2x+1}$

  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ :

  $$e^{x\ln 2} = e^{(2x+1)\ln 3} \quad \Leftrightarrow \quad x\ln 2 = (2x+1)\ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x(\ln 2 - 2\ln 3) = \ln 3$$

  $$x = \frac{\ln 3}{\ln 2 - 2\ln 3} \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{\frac{\ln 3}{\ln 2 - 2\ln 3}\right\}$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\quad \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \dfrac{3}{2}$

  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ :

$e^{x\ln\frac{1}{3}} = e^{\ln\frac{3}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad -x\ln 3 = \ln 3 - \ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3} \quad\Leftrightarrow\quad S = \left\{\dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3}\right\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 3$

  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ :

  $e^{x\ln\frac{1}{\sqrt{3}}} \leqslant e^{\ln 3} \quad\Leftrightarrow\quad -\dfrac{1}{2}x\ln 3 \leqslant \ln 3 \quad\Leftrightarrow\quad -\dfrac{1}{2}x \leqslant 1 \quad \text{car } \ln 3 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \geqslant -2 \quad\Leftrightarrow$
  $S = [-2\,;+\infty[$

- Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ : $x^{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{2}$

  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ et de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ :

  $e^{\sqrt{2}\ln x} \leqslant e^{\ln\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\ln x \leqslant -\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x \leqslant -\dfrac{\ln 2}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad x \leqslant e^{-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}} \quad\Leftrightarrow$

  $S = ]0\,;\, e^{-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}}]$

# 2 Étude de la fonction puissance

## 2.1 Variation

Soit la fonction $f_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$.

Comme $a^x = e^{x\ln a}$, $f_a$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f_a'(x) = \ln a \times e^{x\ln a} = \ln a \times a^x$$

Le signe $f_a'$ dépend donc du signe de $\ln a$. On a alors :

- Si $a > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) > 0$. La fonction puissance est croissante.
- Si $0 < a < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) < 0$. La fonction puissance est décroissante.

## 2.2 Limite en l'infini

- $a > 1$

  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

  Par composition, on a

  $$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

  De même, on montre que :

  $$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

- $0 < a < 1$

  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

  Par composition, on a

  $$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

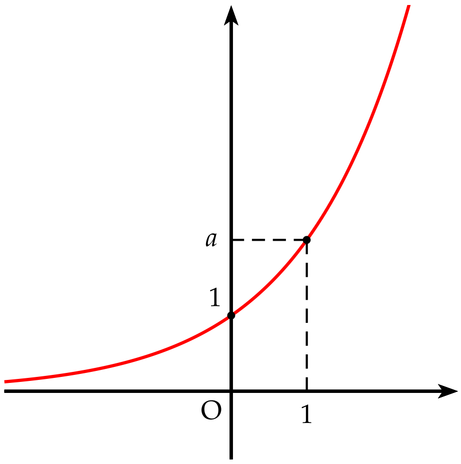
  De même, on montre que :

  $$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

## 2.3 Tableau de variation et courbe

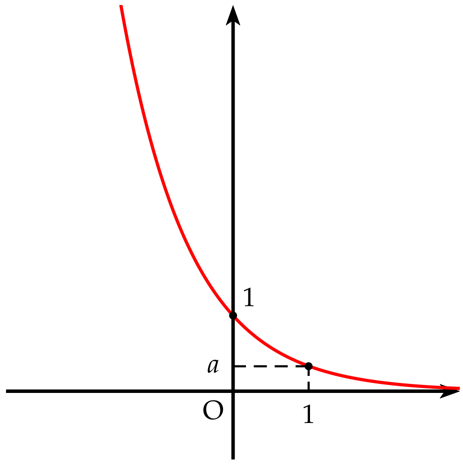
$a > 1$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'_a(x)$ | | $+$ | | |
| $f_a(x)$ | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $a$ ↗ | $+\infty$ |




$0 < a < 1$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'_a(x)$ | | $-$ | | |
| $f_a(x)$ | $+\infty$ ↘ | $1$ ↘ | $a$ ↘ | $0$ |




## 2.4 Étude d'une fonction

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \times 2^x$

- Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x \times 2^x = +\infty \end{array}$$

- Limite en $-\infty$. forme indéterminée : « $\infty \times 0$ »

  On change la forme : $f(x) = xe^{x \ln 2}$ et l'on pose $X = x \ln 2$, on a alors :

$$\text{Si} \quad x \to -\infty \quad \text{on a :} \quad X \to -\infty$$

  La fonction devient alors : $\dfrac{Xe^X}{\ln 2}$

  or on sait que : $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$, donc on en déduit que :

$$\lim_{x \to -\infty} x \times 2^x = 0$$

  On en déduit une asymptote horizontale : l'axe des abscisses en $-\infty$.

- Variation : $f'(x) = e^{x \ln 2} + x \ln 2 e^{x \ln 2} = (1 + x \ln 2)2^x$.

  1) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{1}{\ln 2} \quad (\approx -1,44)$

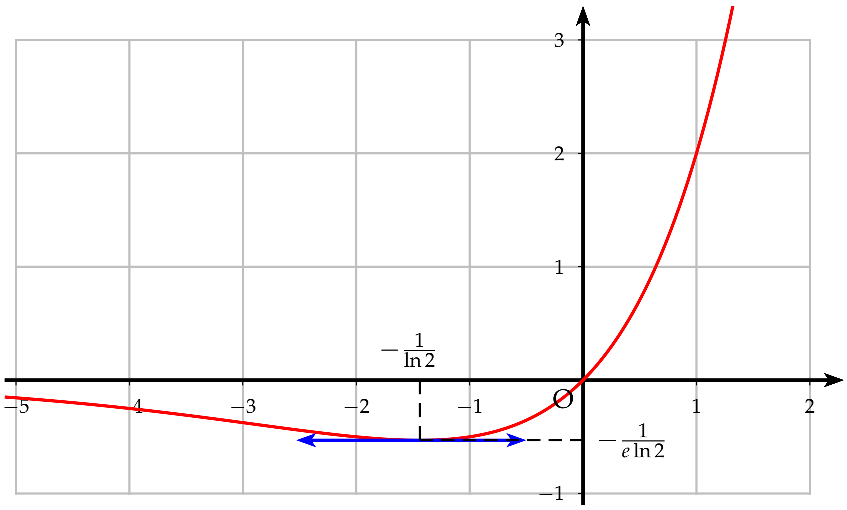
2) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x > 0$ donc, $\text{signe} f'(x) = \text{signe}(1 + x\ln 2)$

- Tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{\ln 2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\dfrac{1}{e\ \ln 2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2} e^{-\frac{1}{\ln 2}\ln 2} = -\frac{1}{e\ \ln 2} \quad (\simeq -0,53)$$

- La courbe




## 2.5 Étude d'une fonction classique

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = x^x & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

- Étude de la continuité en 0 :

  Pour $x > 0$, on a $f(x) = e^{x\ln x}$, on a alors les limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0_+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0_+} e^x = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to 0_+} x^x = 1 \end{array}$$

  Comme $\lim\limits_{x\to 0_+} x^x = f(0)$, la fonction est continue en 0.

  **Remarque :** On dit que l'on a prolongé la fonction $f$ par continuité en 0.

- Étude de la dérivabilité en 0 : il faut étudier le taux d'accroissement de $f$ en 0.

  Pour $h > 0$, on a : $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{e^{h\ln h} - 1}{h}$

  C'est une limite indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On pose : $\quad H = h \ln h, \quad$ si $\; h \to 0\;$ alors $\; H \to 0$.

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{e^H - 1}{\dfrac{H}{\ln h}} = \ln h \times \frac{e^H-1}{H}$$

$\displaystyle \lim_{H \to 0^+} \frac{e^H-1}{H} = 1$ et $\displaystyle \lim_{h \to 0^+} \ln h = -\infty$, d'où : $\displaystyle \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -\infty$.

$f$ n'est pas dérivable en 0 mais $\mathscr{C}_f$ possède une tangente verticale en 0.

- Limite en l'infini

  On montre facilement par produit et composition que : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$

- Variation

  $x^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composition de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$f'(x) = (\ln x + x \times \frac{1}{x})\, e^{x \ln x} = (\ln x + 1)\, x^x$$

  1) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e} \quad (\simeq 0,37)$

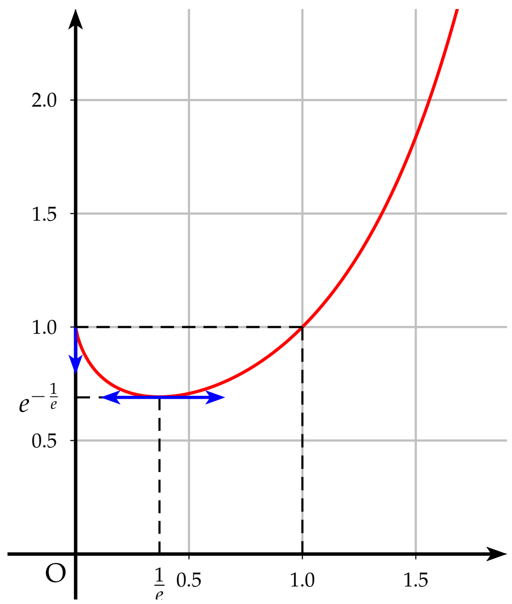
  2) Comme $x^x$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ : signe$f'(x) =$ signe$(\ln x + 1)$.

- Tableau de variation : $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}} \quad (\simeq 0,69)$

  Comme la fonction ln est croissante sur $R_+^*$, la fonction $f'$ est négative puis positive. On a alors le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $e^{-\frac{1}{e}}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- La courbe



# 3 La racine $n$-ieme

## 3.1 Définition

**Définition 2 :** On appelle racine $n$-ieme d'un nombre réel positif $x$, le nombre noté $\sqrt[n]{x}$ tel que :

$$n \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

**Remarque :** Pour $x = 0$, on peut définir : $\sqrt[n]{0} = 0$.

**Exemple :** $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$

**Conséquence** Pour $x$ et $y$ positifs, si $x^n = y$ alors $x = \sqrt[n]{y}$

## 3.2 Simplification et résolutions

- Simplifier les expressions suivantes : $\sqrt{3}\,\sqrt[4]{3^6}$ et $\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

$$\sqrt{3}\,\sqrt[4]{3^6} = 3^{\frac{1}{2}} \times \left(3^6\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$$

$$\frac{\sqrt{x}\,\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{x^5}$$

- Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}_+$ : $\sqrt[3]{x} \geqslant 8$

$$\sqrt[3]{x} \geqslant 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 8^3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 512$$

- Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$suivante : $\sqrt[3]{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0$

  en multipliant l'équation par $\sqrt[3]{x}$, on obtient : $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x} - 6 = 0$

  On pose alors $X = \sqrt[3]{x}$, avec $X > 0$, l'équation devient : $X^2 - X - 6 = 0$.

  $X_1 = -2$ racine évidente, de $P = -6$, on en déduit $X_2 = 3$

  Comme $X' < 0$, cette solution n'est pas retenue. On obtient alors :

$$X_2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^3 = 27$$

# 4 Croissance comparée

## 4.1 Théorèmes

**Théorème 1 :** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

**Remarque :** La première limite a été vue dans le chapitre sur la fonction logarithme. L'idée consiste à faire le changement de variable $X = x^n$

**Démonstration :** Pour la deuxième limite. On utilise la notation exponentielle pour $x^n$. On a alors :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n \ln x}} = e^{x - n \ln x} = e^{x\left(1 - n \frac{\ln x}{x}\right)}$$

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc on a :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 - n\frac{\ln x}{x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{par composition} \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \end{array}$$

**Théorème 2 :** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

**Démonstration :** Pour la première limite, le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, permet de revenir à une limite en $+\infty$

Pour la seconde limite, le changement de variable $X = -x$, permet de revenir à une limite en $+\infty$.

**Remarque :** Je laisse au lecteur le soin de faire ces deux démonstrations

## 4.2 Application

Soit $f$ une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour} \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Démontrer que la fonction $f$ est dérivable en 0.

2) Étudier les variations de $f$ et sa limite en $+\infty$.

3) On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$ au point d'abscisse $x_0$.
   a) Écrire une équation de la tangente T en $x_0$ à $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer $x_0$ pour que T passe par l'origine du repère orthonormal choisi.

4) Pour la valeur $x_0$ trouvée, tracer $T$ puis $\mathscr{C}$ (unité graphique 6 cm)

1) Pour montrer que $f$ est dérivable en 0, il faut montrer que le taux d'accroissement en $0^+$ admet une limite finie.

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\dfrac{1}{h^2} e^{-\frac{1}{h}} - 0}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^3}$$

On pose : $H = -\dfrac{1}{h}$, on a si $h \to 0^+$ alors $H \to -\infty$

La quantité devient : $\dfrac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^3} = \dfrac{e^H}{\left(-\dfrac{1}{H}\right)^3} = -H^3 e^H$

Or on sait que $\lim\limits_{H \to -\infty} H^3 e^H = 0$, donc on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

**Conclusion** : $f$ est dérivable (donc continue) en 0 et sa courbe admet une tangente horizontale en 0.

2) Variation : La fonction $f$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}(-2x+1)$$

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$
- On sait que : $\forall x \in ]0;+\infty[,\ \dfrac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} > 0$

  On en déduit que : signe de $f'(x)$ = signe de $(-2x+1)$

Limite en $+\infty$ : on pose $X = -\dfrac{1}{x}$, donc si $x \to +\infty$ alors $X \to 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to 0} X^2 e^X = 0$ par produit des limites.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Tableau de variation : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{e^2} \approx 0,54$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ | 0 |

3) a) Tangente $T$ en $x_0$ :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^4}(-2x_0+1)(x-x_0) + \frac{1}{x_0^2}e^{-\frac{1}{x_0}}$$

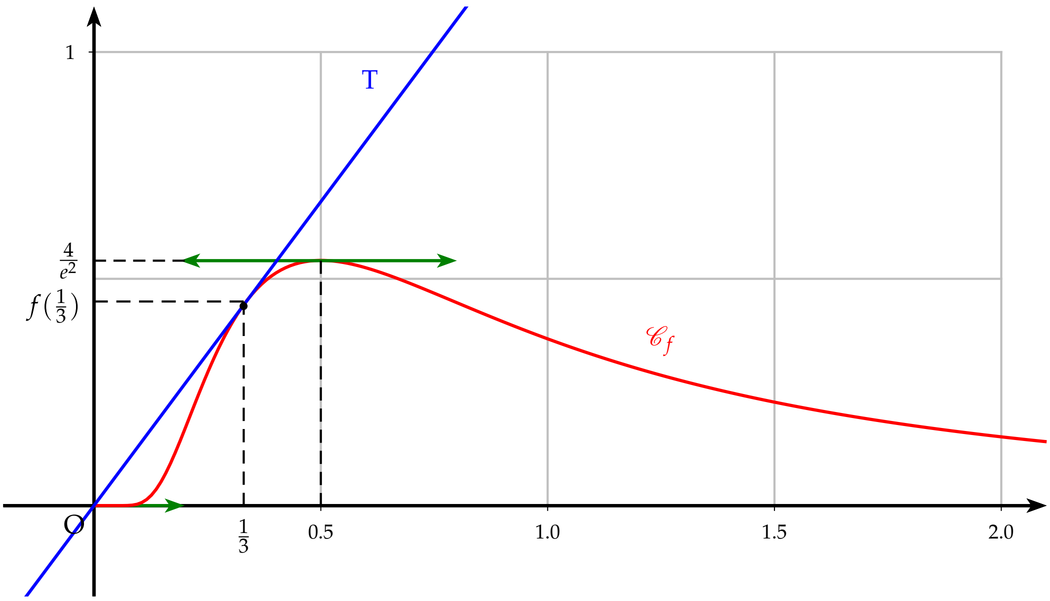
b) Si $T$ passe par l'origine, on doit avoir si $x = 0$ dans l'équation de $T$, $y = 0$.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^4}(-2x_0+1)x_0 + \frac{1}{x_0^2}e^{-\frac{1}{x_0}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^3}(-2x_0 - 1 + x_0) = 0$$

Comme $\dfrac{e^{-\frac{1}{x_0}}}{x_0^3}$ ne s'annule pas, on a : $3x_0 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = \dfrac{1}{3}$

L'équation de $T$ est alors : $y = 3^4 e^{-3}\left(-\dfrac{2}{3}+1\right)x \;\Leftrightarrow\; y = \dfrac{27}{e^3}\,x$

4) Courbe et tangente : $f\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 0,44$

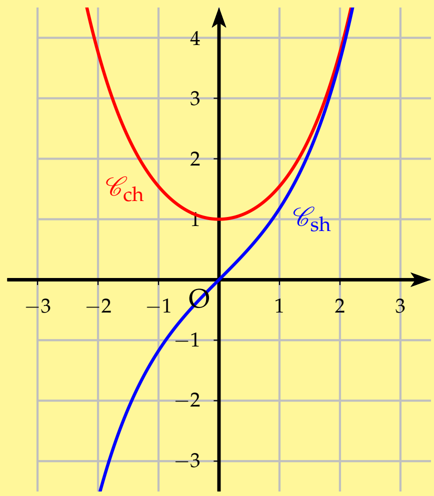



# 5 Cosinus et sinus hyperboliques : ch et sh

**Théorème 3 :** On appelle ch, cosinus hyperbolique, et sh, sinus hyperbolique, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Les fonctions ch et sh sont respectivement paire et impaire.
- Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\; \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$




**Remarque :** Ces fonctions doivent leur nom à leurs propriétés qui rappellent celles des fonctions trigonométriques.

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = 1$