Compléments sur les fonctions

I Fonction ln

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$
2) $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$
3) $\ln(-x-2)=\ln\left(\dfrac{-x-11}{x+3}\right)$
4) $\ln(x+2)=\ln(-x-11)-\ln(x+3)$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2) Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
3) Après avoir vérifier que f est dérivable sur D_f, donner l'expression de $f'(x)$.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité 2 cm.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2) Étudier les variation de g sur $\mathbb{R}_+$.
3) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α pour $x>1$. Donner un encadrement à 10^{-3} de α.
4) Donner le signe g sur $\mathbb{R}_+$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Montrer que f est dérivable en 0. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2) a) Étudier la parité de la fonction f
   b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et sa limite en $+\infty$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(x+1) \leqslant x$.
En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et de sa tangente en 0.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente en 0.

Exercice 4

Un classique

1) Montrer que : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$
   a) En étudiant les variations de deux fonctions.
   b) En utilisant le calcul intégrale.

2) Quelques applications
   a) Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
   b) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
   c) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
   Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln n \leqslant v_n \leqslant 1 + \ln n$
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\ln n}$
   Remarque : On dit que les suites (v_n) et $(\ln n)$ sont équivalentes en $+\infty$ et l'on note $v_n \sim \ln n$

Exercice 5

1) Montrer qu'en chacun de ses points la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ représentant la fonction ln est au-dessous de sa tangente.
Aide : Etudier la fonction : $g(x) = \ln x - \dfrac{x}{a} - \ln a + 1$ avec $a \in]0\,;+\infty[$

2) En déduire alors que pour $x > 0,\ 1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$

3) Donner alors une interprétation graphique de cet encadrement.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$.

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Calculer la fonction dérivée f' puis déterminer son signe sur $[0\,;+\infty[$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

2) a) Montrer qu'il existe un nombre unique α tel que $\alpha > 1$ et $f(\alpha) = 0$
   b) Déterminer un encadrement à 10^{-2} de la valeur de α.

3) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$:

a) quand x tend vers 0,

b) quand x tend vers $+\infty$

4) On donne la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 3x - (x+3)\ln(1+x)$

a) Montrer que g est une primitive de la fonction f.

b) Calculer l'aire S du domaine limité par l'axe des abscisse, la courbe $\mathscr{C}_f$ dont les points ont une ordonnée positive en fonction de α. On exprimera S sous la forme d'une fraction.

II Fonction exp

Exercice 7

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

a) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer alors $f'(x)$

Exercice 8

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Conséquences graphiques ?

2) Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ?

3) Déterminer alors $f'(x)$ puis étudier les variation de f.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère d'unité 2 cm.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Interpréter géométriquement u_n.

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$

3) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4) Prouver que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction F définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) a) Montrer que F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F.

2) On admet que : $\forall t \geqslant 0,\ t+2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

a) En déduire que : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ F(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}\,\mathrm{d}t$

b) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que :
$\forall x \in [1\,;+\infty[,\quad \displaystyle\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}\,\mathrm{d}t = 4-(x+3)\,e^{1-x}$

c) En déduire que : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ \ 0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$

3) On note pour tout entier n, non nul, S_n la somme des $(n-1)$ premiers termes de la suite (u_n).
Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite

EXERCICE 9

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x-2)e^x + x$,
et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Calculer h', puis h''.
   b) Déterminer le sens de variation de h', puis le signe de h'.
   c) En déduire les variations de h.
2) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variations de h.
3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$,
   b) Préciser l'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D) et leurs positions relatives.
   c) Préciser la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   d) Tracer $(\mathscr{C})$, (D) et (T) dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

EXERCICE 10

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = 1 - \dfrac{2n}{x+n} - e^{-x}$.

1) Étudier les variation de f_n.
2) Préciser $f_n(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.
3) Calculer $f_n(n)$ et préciser son signe.
4) Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul : $e^{n+1} > 2n+1$.
5) En déduire le signe de $f_n(n+1)$.
6) Démontrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution u_n et que $n < u_n < n+1$.

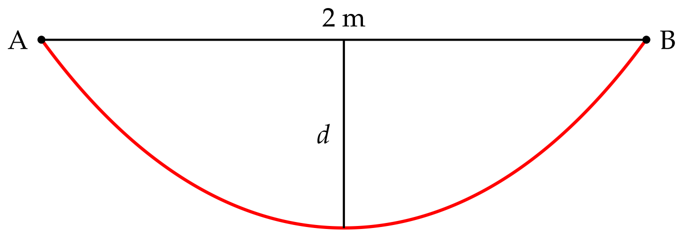
EXERCICE 11

Étude de la courbe « chaînette »

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

On montre que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme : $y = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$, avec $\lambda > 0$.

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche d prise par le fil.



Pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$.
On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un repère orthonormé.

Partie A : Étude de la chaînette.

1) a) Étudier la parité de f_1 ; préciser sa limite en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.

   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ (unité graphique 1 cm).

   c) Exprimer $f_\lambda(x)$ en fonction de $f_1(x)$ et λ.
   En déduire que, pour tout λ, la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ se déduit de $\mathscr{C}_1$ par une homothétie dont on précisera le centre et la rapport.

2) Calcul de la longueur de la chaînette.
   On admet que la longueur $\mathrm{L}(\lambda)$ de l'arc d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points $x = -1$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale : $\mathrm{L}(\lambda) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[f'_\lambda(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x$
   (l'unité de longueur étant le mètre).

   a) Vérifier que $1 + \left[f'_\lambda(x)\right]^2 = \left(\dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right)^2$

   b) En déduire que : $\mathrm{L}(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}$.

3) Calcul de le flèche.
   Exprimer en fonction de λ la flèche $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0)$ de la chaînette $\mathscr{C}_\lambda$ (l'unité de longueur étant le mètre).

Partie B : Étude de l'équation $\mathrm{L}(\lambda) = 4$.
Soit λ un réel strictement positif.

1) a) Résoudre l'équation d'inconnue X réelle $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.

   b) En déduire que $\mathrm{L}(\lambda) = 4$ équivaut à $e^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$.

   c) Prouver enfin que $\mathrm{L}(\lambda) = 4$ équivaut à : $\lambda = \ln\left(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}\right)$.

2) Soient g et h les fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) \quad \text{et} \quad h(x) = x - g(x)$$

   a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

   b) Calculer $h'(x)$. Étudier le signe de $h'(x)$.

   c) Prouver que pour tout $x > 0$: $g(x) = \ln x + \ln\left(2 + \sqrt{4 + \dfrac{1}{x^2}}\right)$.

   En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variations de h.
En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une solution α et une seule dans $]0\,;+\infty[$.

e) Prouver que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$ puis en déduire un encadrement de α à 10^{-3} près.

3) Donner alors une valeur approchée de la flèche $d(\alpha)$.

III Dérivée seconde et dérivées successives

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln(x^2)}{x}$

1) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point de symétrie que l'on précisera.
3) Calculer la fonction dérivée puis dresser le tableau de variation.
4) Calculer la dérivée seconde puis déterminer les points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
5) Représenter la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que les tangentes horizontales et les points remarquables (unité : 2 cm).

EXERCICE 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin 3x - 5\cos 3x$.

Établir une relation entre les fonctions f et f''.

IV Fonction puissance

EXERCICE 14

1) Simplifier les écritures suivantes :

a) $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ b) $(0,25)^{-1,5}$ c) $e^{2+\ln 8}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes puis donner une valeur approchée des solutions.

a) $2^x = 3^{2x+1}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \dfrac{3}{2}$

c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 3$

d) Dans $\mathbb{R}_+^*$, $x^{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 3$

b) $7^{x-1} = 3^x$

c) $5^{1-3x} = \dfrac{1}{125}$

d) $4^x - 6^x = 2 \times 9^x$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $5^{-x} < 5^{2x}$

b) $\dfrac{2^x}{2^x + 1} < \dfrac{1}{3}$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$

b) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leqslant 0$

c) $2^{2x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$

d) $2^{2x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geqslant 0$

EXERCICE 15

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \times 2^{-x}$ et
g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x^{-1} \times 2^x$

1) Étudier les variation de f et g.
2) Étudier les limites de f et g aux bornes de leur ensemble de définition
3) $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 4 cm et $\mathscr{C}_g$ celle de g.
   a) Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $\dfrac{2}{\ln 2}$
   b) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ après avoir comparé les positions respective de $\mathscr{C}_f$ et T.

V Asymptote oblique

EXERCICE 16

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2) Déterminer les limites aux bornes de D_f.
3) Étudier les variation de f sur D_f.
4) Soit les droites Δ_1 d'équation $y = x + \dfrac{3}{2}$ et Δ_2 d'équation $y = -x - \dfrac{3}{2}$.
   Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont respectivement asymptotes à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

EXERCICE 17

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$.

a) Montrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{(x+1)^2}$.
b) a) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   b) Déterminer f' puis les variations de la fonction f.
c) Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote oblique Δ et étudier la position relative de Δ et $\mathscr{C}_f$.
d) Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ

EXERCICE 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x-2}$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Calculer la dérivée de la fonction f. En déduire les variations de la fonction f.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) a) Justifier que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d. À l'aide d'une division euclidienne déterminer l'équation de cette asymptote puis étudier leur position relative.

   b) Montrer que le point I, intersection des asymptotes de $\mathscr{C}_f$ est un point de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

   c) Tracer d et $\mathscr{C}_f$.

3) a) En utilisant $\mathscr{C}_f$, déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation :

$$\cos(2u) + 2(1-m)\cos u + 4m + 1 = 0 \quad \text{avec } u \in [0, 2\pi]$$

EXERCICE 19

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,; -4] \cup [0\,; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Prouver que la droite d d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
3) Sur quels intervalles la fonction f est-elle dérivable ? Calculer la dérivée de la fonction f sur ces intervalles.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer les asymptotes, puis la courbe $\mathscr{C}$.