

Équations différentielles Appliquées à la physique

Table des matières

1	Introduction	2
2	Méthode de résolution	2
3	Premier ordre	2
3.1	Résultat mathématique	2
3.2	Notation physique	2
3.3	Interprétation graphique	3
3.4	Exemples	4
3.4.1	Décharge d'un condensateur	4
3.4.2	Chute libre	4
4	Second ordre	6
4.1	Résultats mathématiques	6
4.2	Notations physiques	6
4.3	Identification graphique	7
4.3.1	Régime apériodique	7
4.3.2	Régime pseudo périodique	8
4.4	Exemples	9
4.4.1	Système mécanique	9
4.4.2	Système harmonique	10
4.4.3	Système RLC	11
4.4.4	Analogie entre un système mécanique et un circuit RLC	11

1 Introduction

On se limitera aux équations différentielles linéaires de degré 1 et 2 à coefficients et second terme constants. C'est à dire les équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$y' + a_0y = b \quad \text{et} \quad y'' + a_1y' + a_0y = b$$

ou encore avec la notation différentielle de variable t :

$$\frac{dy}{dt} + a_0y = b \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0y = b$$

2 Méthode de résolution

Comme on a pu le voir dans la résolution de mathématiques :

- On résout l'équation homogène c'est à dire sans second membre :

$$y' + a_0y = 0 \quad \text{et} \quad y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

- On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Comme celui-ci est constant, on peut prendre $y_{\text{part}} = \frac{b}{a_0}$
- La solution générale est alors la somme des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière : $y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$
- On utilise ensuite la ou les conditions initiales pour trouver la solution qui convient.

Remarque : Dans la majorité des cas les coefficients a_0 , a_1 et b seront positifs.

3 Premier ordre

3.1 Résultat mathématique

Théorème 1 : Les solutions de l'équation différentielle $y' + a_0y = b$ sont les fonctions y de la forme :

$$y(t) = \lambda e^{-a_0t} + \frac{b}{a_0}$$

Remarque : Je vous invite à lire la démonstration dans le cours de mathématiques au paragraphe 1.5.

3.2 Notation physique

On préfère écrire en physique l'équation de premier ordre sous la forme :

$$y' + \frac{1}{\tau}y = b \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{a_0}$$

τ correspond au temps caractéristique facilement évaluable graphiquement.

Les solutions sont alors : $y(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + b\tau$

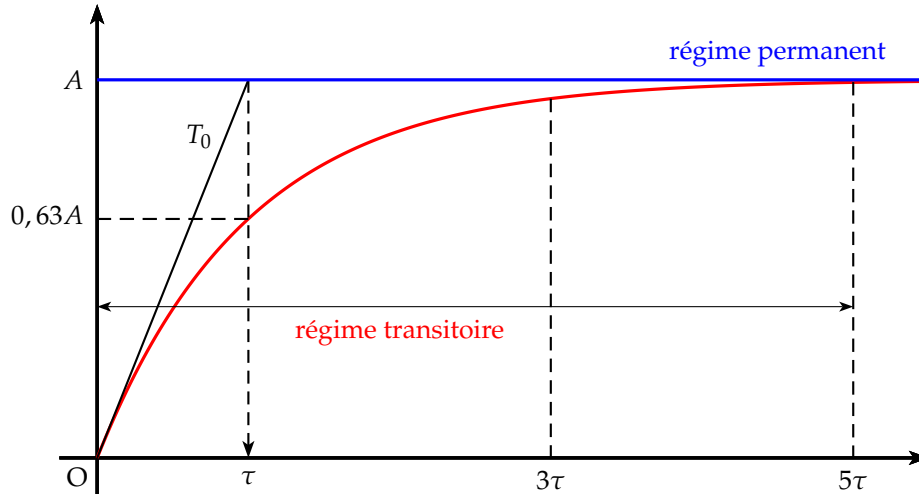
On détermine λ à l'aide d'une condition initiale souvent avec $y(0)$.

3.3 Interprétation graphique

On obtient une fonction croissante ou décroissante selon le signe de λ

La solution particulière fixe le régime permanent et la solution homogène fixe le régime transitoire.

- $\lambda < 0$ et $y(0) = 0$ on a alors $y(t) = A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$



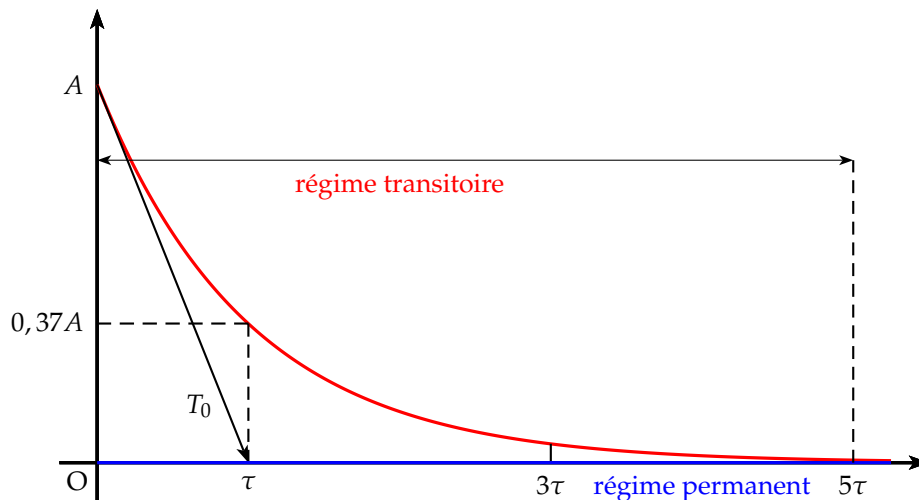
T_0 représente la tangente à la courbe en 0.

Elle coupe l'asymptote du régime permanent au point d'abscisse τ .

On peut retenir

τ	3τ	5τ
63 %	95 %	99 %

- $\lambda > 0$ et $y(0) = A$ on a alors $y(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$



T_0 représente la tangente à la courbe en 0.

Elle coupe l'asymptote du régime permanent (ici l'axe des abscisses) au point d'abscisse τ .

On peut retenir

τ	3τ	5τ
37 %	5 %	1 %

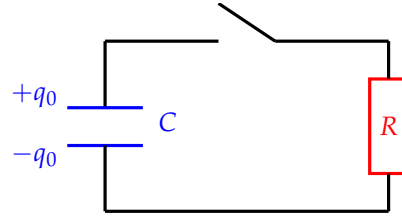
Remarque : τ représente l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

3.4 Exemples

3.4.1 Décharge d'un condensateur

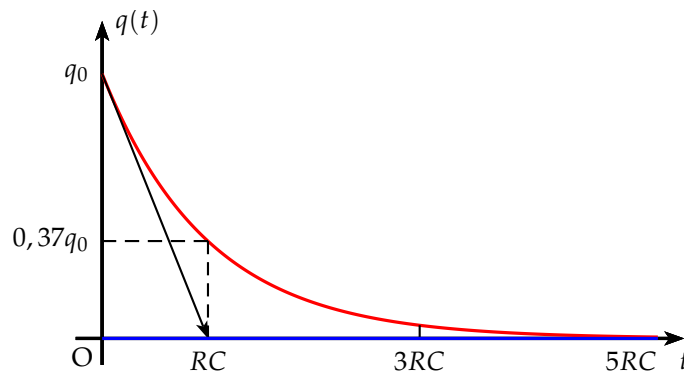
Considérons un condensateur dont les armatures initialement chargées à $\pm q_0$ comme dans la figure ci-dessous.

Il n'y a aucun mouvement de charges tant que l'interrupteur est ouvert. On ferme l'interrupteur à $t = 0$, il y a un mouvement de charges qui crée un courant i dans le circuit. La somme des tensions aux bornes du condensateur et de la résistance étant nulle, on a :



$$\frac{q}{C} + Ri = 0 \Leftrightarrow \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0 \quad \text{donc } \tau = RC$$

La solution générale est $q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$ or $q(0) = q_0$ donc $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

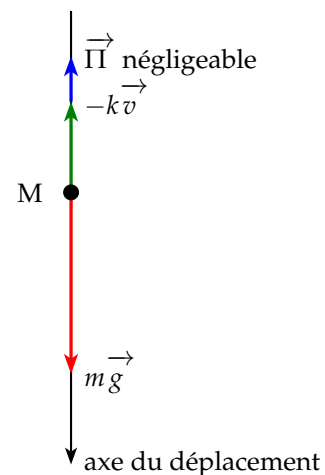


3.4.2 Chute libre

On cherche à déterminer l'expression de la vitesse d'un corps dans l'air, c'est à dire dans notre environnement habituel. Lorsqu'on lâche un corps M de masse m dans cet environnement, il est soumis à trois forces :

- son poids : $m \vec{g}$,
- une force de frottement : $-k \vec{v}$ qui s'oppose au mouvement et qui est proportionnelle à la vitesse k dépend de la forme du corps et de la composition de l'atmosphère.
- la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}$ que l'on négligera en raison de sa faible influence.

On oriente l'axe du déplacement vers le bas



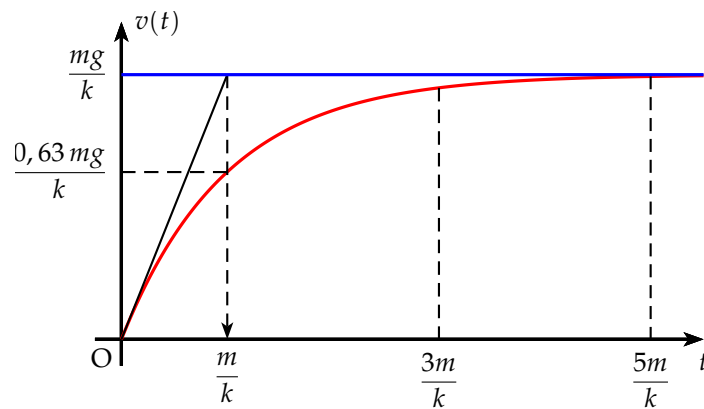
D'après le second principe de la dynamique on a :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{g} - k \vec{v}$$

en projetant sur l'axe du mouvement et en remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, on obtient :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad \text{donc } \tau = \frac{m}{k}$$

- La solution de l'équation homogène est : $\lambda e^{-\frac{k}{m}t}$
- Une solution particulière est : $\frac{b}{a_0} = \frac{mg}{k}$.
- La solution générale est : $v(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ or $v(0) = 0$ donc $v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$



Remarque : Un corps lâché en chute libre possède une vitesse limite $v_{\infty} = \frac{mg}{k}$

4 Second ordre

4.1 Résultats mathématiques

Théorème 2 : Soit l'équation différentielle homogène du second ordre :

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

On appelle **polynôme caractéristique** de l'équation, le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^2 + a_1 X + a_0$$

Soit Δ le discriminant du polynôme P

Les solutions de l'équation dépend du nombre et de la nature des racines du polynôme P .

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines réelles X_1 et X_2 , les solutions sont :

$$y(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double X_0 , les solutions sont :

$$y(t) = (\lambda + \mu t) e^{X_0 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, P admet deux racines complexes conjuguées $X_1 = X_0 + i\omega$ et $X_2 = X_0 - i\omega$, alors les solutions peuvent se mettre sous la forme :

$$y(t) = \lambda e^{X_0 t} [\sin(\omega t + \varphi)], \quad (\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ou}$$

$$y(t) = e^{X_0 t} [\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)], \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque : $a_1 = 0$ et $\Delta < 0$ donne pour P des racines imaginaires pures $X_1 = i\omega$ et $X_2 = -i\omega$.

Les solutions de l'équation homogène sont alors :

$$y(t) = \lambda \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$$

4.2 Notations physiques

On préfère écrire en physique l'équation du second ordre sous la forme :

$$y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = 0$$

γ correspond à l'**amortissement** (rd.s⁻¹)

ω_0 correspond à la **pulsation propre** (rd.s⁻¹)

$$\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

- $\Delta > 0$, comme les coefficients γ et ω_0 sont positifs, les racines réelles X_1 et X_2 sont négatives. Les solutions de l'équation homogène sont la combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes :

$$y(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t}$$

On dit que ce sont des solutions amorties ou surcritiques.

Le régime est dit **apériodique**.

Il n'y a pas d'oscillation autour de l'axe des abscisses.

- $\Delta = 0$, comme les coefficients γ et ω_0 sont positifs, la racine double X_0 est négative. Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = (\lambda + \mu t)e^{X_0 t}$$

On dit que ce sont des solutions amorties critiques.

Le régime est dit **apériodique critique**.

Il n'y a pas d'oscillation autour de l'axe des abscisses.

- $\gamma = 0$ on a alors $\Delta = -\omega_0^2$. Les racines sont donc $\pm i\omega_0$. Les solutions sont purement sinusoïdales :

$$y(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou} \quad y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Le régime est dit **harmonique**.

Remarque : C'est un régime théorique car dans tout système physique il y a des pertes d'énergie (frottements). Cependant un exemple qui se rapproche de cette situation est l'isochronisme des petites oscillation (voir cours math paragraphe 2.4)

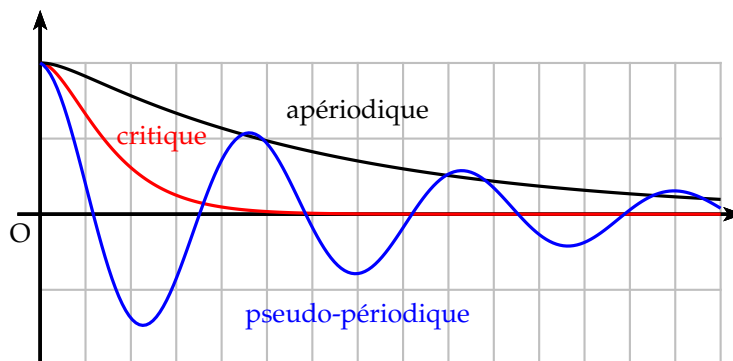
- $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées. On pose $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Les racines sont alors $-\gamma \pm i\omega_p$ et les solutions de l'équation :

$$y(t) = [\lambda \cos(\omega_p t) + \mu \sin(\omega_p t)] e^{-\gamma t} \quad \text{ou} \quad y(t) = A \sin(\omega_p t + \varphi) e^{-\gamma t}$$

Le régime est dit **pseudo-périodique** ou **pseudo-critique**.

Remarque : Il y a donc des oscillations autour de l'axe des abscisses de moins en moins grande avec une fréquence plus petite ($\omega_p < \omega_0$).

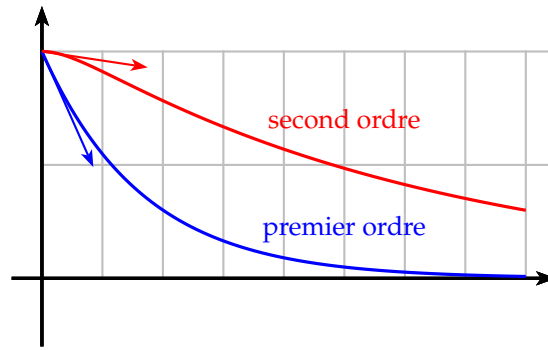
On peut schématiser les trois cas par le graphique suivant :



4.3 Identification graphique

4.3.1 Régime apériodique

Il est assez difficile de distinguer le régime apériodique d'une équation du premier ordre. En général la pente en 0 est faible contrairement à du premier ordre qui à une pente plus importante (pente sèche).

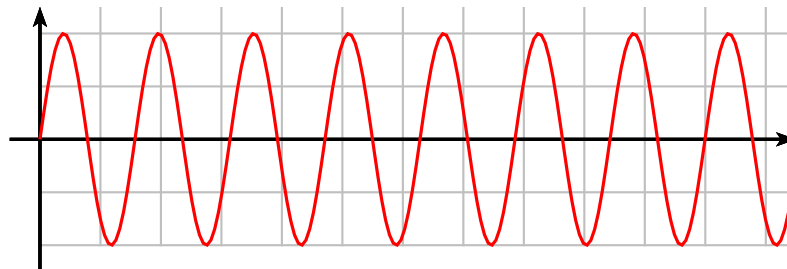
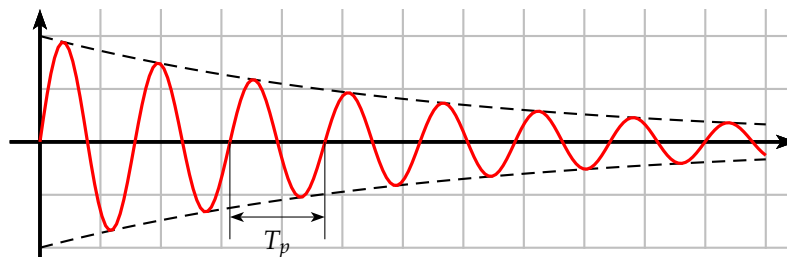
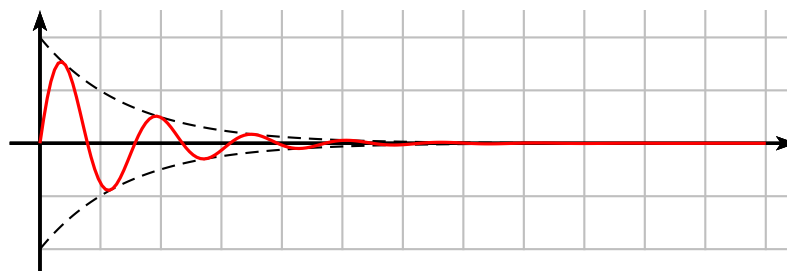


Dans le cas où la pente est sèche pour le régime aperiodique, on assimile en général le système à un premier ordre et on utilise les méthodes du premier ordre (tangente à l'origine). On montre que si le discriminant de l'équation caractéristique est assez grand ($\gamma \gg \omega_0$), on a alors deux racines très écartées donc l'une rend l'exponentielle très négligeable devant l'autre ce qui explique cette allure d'ordre un. On montre aussi que plus le discriminant est grand plus cette racine s'approche de $-\frac{\omega_0^2}{2\gamma}$

$$\Delta \gg 1, \text{ on a : } y(t) \approx y_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{2\gamma}t}$$

4.3.2 Régime pseudo périodique

On peut distinguer trois régimes : le régime harmonique, le régime peu amorti et le régime très amorti.

régime harmonique $\gamma = 0$ régime pseudo-périodique peu amorti $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ 

régime pseudo-périodique très amorti

4.4 Exemples

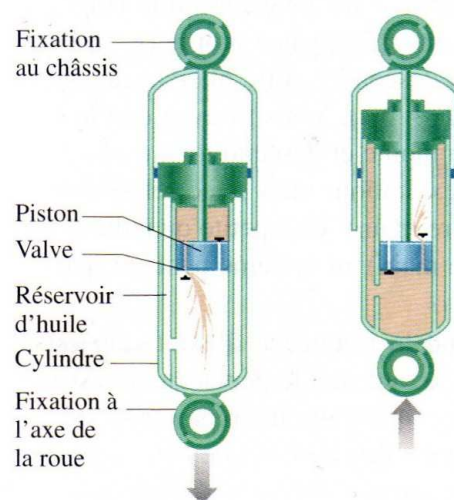
4.4.1 Système mécanique

Un mécanisme de frottement courant est l'amortissement visqueux (nous baignons dans l'air). Aux faibles vitesses, la force de viscosité est proportionnelle à la vitesse du corps dans le fluide. Tout système oscillant dans l'air et non entretenu finit par s'arrêter.

Si l'amortissement est faible, le système peut continuer à osciller pendant un temps relativement long avant de s'arrêter à sa position d'équilibre. Un tel système est **pseudo-périodique**. C'est le cas d'un pendule ordinaire. L'amplitude diminue d'autant plus rapidement et le corps subit d'autant moins d'oscillations (de l'ordre de $\frac{\omega_0}{2\gamma}$) avant de s'arrêter, que le frottement est plus grand. Le mouvement est **oscillatoire mais non périodique** car son amplitude diminue. Le mouvement est pseudo-périodique. La pseudo période est plus longue que la période du régime harmonique ($\omega_p < \omega_0$).

Si le frottement augmente, le système peut revenir lentement à sa position d'équilibre sans jamais la dépasser. Il n'y a plus d'oscillations. Les amortisseurs d'une voiture, par exemple, doivent étouffer toute oscillation en moins d'un cycle ; on a pas envie que notre voiture oscille vers le haut et vers le bas lorsque l'on passe sur une bosse. Quand le système revient à l'équilibre dans le temps le plus court sans oscillation, on dit que le système est **apériodique critique**. Si l'on augmente l'amortissement, le système n'oscille plus mais il met plus de temps à revenir à sa position d'équilibre. Les lourdes portes des bâtiments publics ont presque toutes un dispositif hydraulique au dessus d'elles pour qu'elles ne claquent pas tout le temps mais se ferment lentement. On dit que le système est **apériodique**.

L'amortisseur d'une voiture a un frottement visqueux ; la force est alors proportionnelle à la vitesse du piston. Une secousse rapide du piston, qui peut être produite quand la voiture passe sur un dos d'âne, se heurte à une grande force d'amortissement. Par contre, un mouvement lent et progressif du piston ne rencontre qu'une faible résistance.



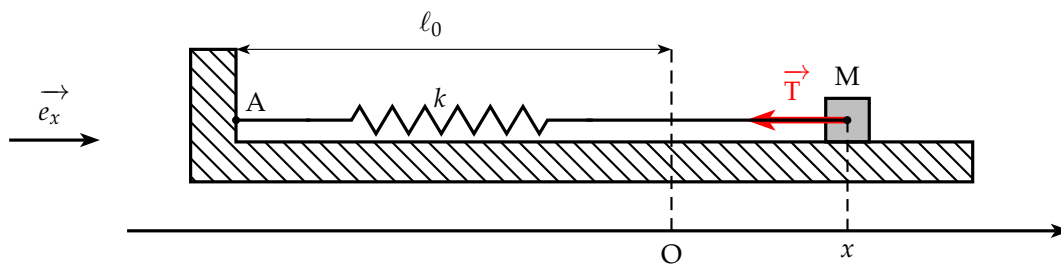
4.4.2 Système harmonique

Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal. L'autre extrémité du ressort étant fixe en A. Le ressort a une longueur à vide ℓ_0 et une constante de raideur k .

Le point M glisse sans frottement à partir de sa position d'équilibre située en O. Il est repéré à tout instant sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$ (grandeur algébrique).

À l'instant $t = 0$, le point M est abandonné sans vitesse initiale du point M₀ d'abscisse x_0 .

Le but est d'établir l'expression de la tension \vec{T} en fonction du temps.



Le point M n'est soumis qu'à la force de rappel du ressort car celui-ci glisse sans frottement. D'après le second principe de la dynamique :

$$m \vec{a} = -kx \vec{e}_x$$

en projetant sur l'axe des abscisses, et en remarquant que l'accélération est la dérivée seconde de la position x , on obtient :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'équation devient : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$.

On reconnaît un régime harmonique ($\gamma = 0$).

L'équation générale est alors : $x(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$.

La vitesse initiale est nulle donc

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow -\lambda \omega_0 \sin(0) + \mu \omega_0 \cos(0) = 0 \Leftrightarrow \mu \omega_0 = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$$

On a alors : $x(t) = \lambda \cos(\omega_0 t)$ comme $x(0) = x_0$ on a $\lambda = x_0$

La position du point M est définie par : $x = x_0 \cos(\omega_0 t)$

On en déduit alors l'expression de la tension T : $\vec{T}(t) = -kx_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x$

Cette force est dite « force de rappel élastique » car cette force tend à remettre le ressort dans sa position naturel en O.

Remarque : Si le point M était soumis à une force de frottement, proportionnelle à la vitesse, l'équation différentielle serait alors :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

En posant $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, on aurait $x(t) = x_0 \cos(\omega_p t) e^{-\gamma t}$

4.4.3 Système RLC

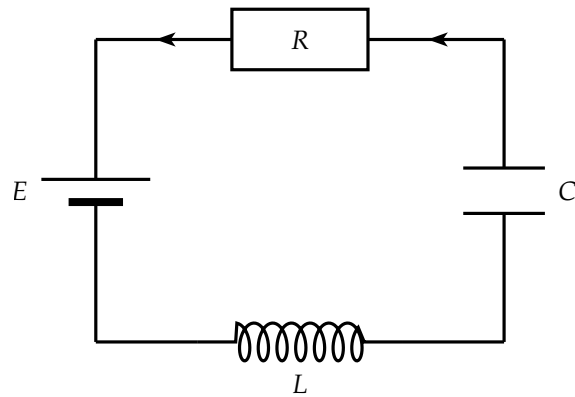
$$u_L + u_R + u_C = E$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = E$$

$$\text{Or } \frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

En dérivant, on obtient :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (1)$$



En divisant par L , on a :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (2)$$

4.4.4 Analogie entre un système mécanique et un circuit RLC

1) Analogie entre un système mécanique et un circuit RLC :

- La **position** x est associée à la **charge** q
- La **vitesse** $x' = v$ est associée au **courant** i
- L'**accélération** $x'' = a$ est associée à la **quantité** $\frac{di}{dt}$
- La **force** f est associée à la **tension** u

2) De l'équation (1), on peut associer :

- À la **masse** m l'**inductance** L
- Au **coefficient de frottement** la **résistance** R
- À la **constante de raideur** k , la **quantité** $\frac{1}{C}$

3) De l'équation (2), on peut associer :

- À l'**amortissement** 2γ à la **quantité** $\frac{R}{L}$
- À la **pulsation propre** ω_0 à la **quantité** $\frac{1}{LC}$

Théorème 3 : Tout système mécanique caractérisé par une équation différentielle de degré 1 ou 2 peut être simulé par un circuit RLC