Relations binaires. Relations d'équivalence et d'ordre

Table des matières

1 Généralités

En mathématiques, on cherche souvent à comparer deux éléments d'un ensemble ou la propriété que deux éléments d'un ensemble sont susceptibles d'avoir.

1.1 Définition

Définition 1 : Une relation binaire $\mathscr{R}$ définie sur un ensemble E est au choix :

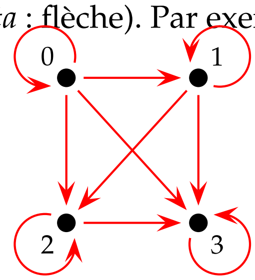
- une propriété qui relie ou non deux éléments x et y de E. On note $x \mathscr{R} y$ pour dire que l'élément x est en relation avec y
- une partie de $E \times E$. On note $x \mathscr{R} y$ si $(x, y) \in \mathscr{R}$

⚠ Pour un couple $(x, y) \neq (y, x)$ donc on fera la différence entre $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x$. Par exemple si $\mathscr{R}$ est la relation < sur $\mathbb{R}$: si l'on a $x < y$ on n'a pas $y < x$.

Exemples : Les relations que l'on utilise couramment en mathématiques

- La relation d'égalité sur un ensemble E « = »
- Les relations sur $\mathbb{R}$ « < », « $\leqslant$ », « > », « $\geqslant$ ».
- La relation sur $\mathbb{Z}$ « | » : $a|b$ si « a divise b ».
- La relation sur $\mathbb{Z}$ « $\equiv [n]$ » : $a \equiv b\ [n]$ si que a est congru à b modulo n.
- La relation sur $\mathscr{P}(E)$ « $\subset$ » : $A \subset B$ si que A est inclus dans B.
- La relation sur les droites du plan « // » : $d // d'$ si la droite d est parallèle à d'.
- La relation sur les droites du plan « $\perp$ » : $d \perp d'$ si la droite d est perpendiculaire à d'.

Remarque : On peut représenter une relation binaire par un graphe ou un diagramme sagittal (du latin *sagitta* : flèche). Par exemple la relation $\leqslant$ sur $[\![0,3]\!]$



1.2 Compatibilité d'une relation avec une loi interne

Définition 2 : Soient $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

La relation $\mathscr{R}$ est compatible avec la loi de composition interne $*$ sur E si :

$$(a \mathscr{R} b \text{ et } c \mathscr{R} d) \Rightarrow (a * c) \mathscr{R} (b * d)$$

Exemples :

- La loi $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est compatible avec l'addition mais pas avec la multiplication.
- La loi $\equiv [n]$ sur $\mathbb{Z}$ est compatible avec l'addition et la multiplication.

1.3 Qualité d'une relation binaire

Définition 3 : Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que $\mathscr{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E,\ \ x \mathscr{R} x$
- On dit que $\mathscr{R}$ est symétrique si : $\forall x, y \in E,\ \ x \mathscr{R} y \ \Rightarrow\ y \mathscr{R} x$
- On dit que $\mathscr{R}$ est antisymétrique si : $\forall x, y \in E,\ \ (x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} x) \ \Rightarrow\ x = y$
- On dit que $\mathscr{R}$ est transitive si : $\forall x, y, z \in E,\ \ (x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z) \ \Rightarrow\ x \mathscr{R} z$

Exemples :

- La relation d'égalité $=$ sur E est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- Les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sur $\mathbb{R}$ sont réflexives, antisymétrique et transitives. Elles ne sont pas symétriques.
- Les relation $<$ et $>$ sur $\mathbb{R}$ sont antisymétriques et transitives. Elles ne sont ni réflexives, ni symétriques.
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive. Elle n'est ni symétrique, ni antisymétrique : $(2|(-2)$ et $-2|2$ mais $-2 \neq 2)$
- La relation $\equiv\ [n]$ de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$ est réflexive, symétrique et transitive. Elle n'est pas antisymétrique.

1.4 Relation totale ou partielle

Définition 4 : Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que x et y de E sont comparable par $\mathscr{R}$ si : $x \mathscr{R} y$ ou $y \mathscr{R} x$.
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est totale si deux éléments quelconques de E sont comparable :
$$\forall x, y \in E,\ \ x \mathscr{R} y \text{ ou } y \mathscr{R} x$$
- On dit que la relation $\mathscr{R}$ est partielle dans le cas contraire.

Exemple :

- Les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sur $\mathbb{R}$ sont totales mais $<$ et $>$ sont partielles car on ne peut comparer deux éléments identiques.
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}^*$ est partielle : on ne peut comparer 3 et 5 car l'un des deux n'est pas un diviseur de l'autre.

2 Relation d'équivalence

2.1 Définition

Définition 5 : Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E si $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Remarque : Une relation d'équivalence est notée parfois $\sim$

Une relation d'équivalence permet de mettre en relation des éléments qui sont similaires pour une certaine propriété.

Exemples :

- La relation $\equiv\ [n]$ sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. On vérifie facilement qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une autre relation $\equiv\ [\alpha]$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence : $x \equiv y\ [\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = y + k\,\alpha$.
  - Réflexivité : $a = a + 0 \times \alpha$ donc $a \equiv a\ [\alpha]$
  - Symétrie : $a \equiv b\ [\alpha] \quad \Rightarrow \quad a = b + k\,\alpha \quad \Rightarrow \quad b = a + (-k)\alpha \quad \Rightarrow \quad b \equiv a\ [\alpha]$
  - Transitivité : $(a \equiv b\ [\alpha]$ et $b \equiv c\ [\alpha]) \quad \Rightarrow \quad (a = b + k\,\alpha$ et $b = c + k'\,\alpha) \quad \Rightarrow$ $a = k'\,\alpha + k\,\alpha = (k' + k)\alpha \quad \Rightarrow \quad a \equiv c\ [\alpha]$

2.2 Classe d'équivalence. Ensemble quotient

Théorème 1 : Soit $\mathscr{R}$ une loi d'équivalence sur E.

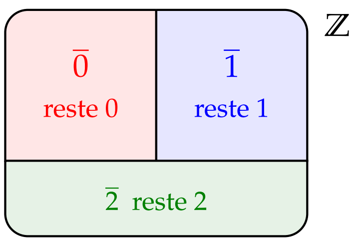
- On appelle classe d'équivalence d'un élément x de E, l'ensemble $C(x)$ des éléments de E en relation avec x par $\mathscr{R}$:
$$C(x) = \{y \in E,\ \ y\,\mathscr{R}\,x\}$$
- L'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathscr{R}$ forment une partition de E : leur réunion forme E et sont deux à deux disjointes.
- L'ensemble des classes d'équivalence de E pour $\mathscr{R}$ est appelé l'ensemble quotient de E par $\mathscr{R}$ noté $E/\mathscr{R}$

Remarque : Toute classe d'équivalence peut être exprimée en français sous la forme « avoir le même [...] ». Par exemple « avoir le même reste dans la division par n » dans $\mathbb{Z}$. Notation usuelle pour la classe d'équivalence de x : $\overline{x}$ ou $\dot{x}$

Pour la relation $\equiv\ [3]$

Trois classes d'équivalence : $\{\overline{0}\ ,\ \overline{1}\ ,\ \overline{2}\}$ correspondant aux trois restes dans la division par 3

Son ensemble quotient se note : $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$



L'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ est donc un ensemble d'ensembles inclus dans $\mathscr{P}(E)$

Démonstration : Montrons que $E/\mathscr{R}$ forme une partition de E.

Notons $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x pour $\mathscr{R}$.

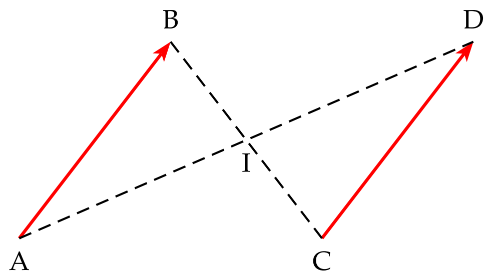
- $\forall x \in E,\ \ x \in \overline{x}$ car réflexivité $x \mathscr{R} x$ on en déduit que $E = \bigcup_{x \in E} \overline{x}$.
- Montrons que si $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$ alors $\overline{x} = \overline{y}$.

$$z \in \overline{x} \cap \overline{y} \ \Rightarrow\ \begin{cases} z \mathscr{R} x \\ z \mathscr{R} y \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \text{Par symétrie et transitivité} \\ x \mathscr{R} y \end{cases} \ \Rightarrow\ \overline{x} = \overline{y}$$

Exemple :

Un bipoint (A,B) est un couple de points du plan.

On définit la relation $\mathscr{R}$ (équipollence) telle que :
(A,B) $\mathscr{R}$ (C,D) si les segments [AD] et [BC] ont même milieu.



$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence car :

- [AB] et [BA] ont même milieu donc (A,B) $\mathscr{R}$ (A,B).
- (A,B) $\mathscr{R}$ (C,D) $\Rightarrow$ $m[\text{AD}] = m[\text{BC}]$ $\Rightarrow$ $m[\text{CB}] = m[\text{DA}]$ $\Rightarrow$ (C,D) $\mathscr{R}$ (A,B)
- $\begin{cases} (\text{A,B})\ \mathscr{R}\ (\text{C,D}) \\ (\text{C,D})\ \mathscr{R}\ (\text{E,F}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m[\text{AD}] = m[\text{BC}] \\ m[\text{CF}] = m[\text{DE}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ABDC et CDFE} \\ \text{parallélogrammes} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} (\text{AB}) \,/\!/\, (\text{CD}) \,/\!/\, (\text{EF}) \\ \text{AB} = \text{CD} = \text{CF} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ABFE parallélogramme} \\ m[\text{AF}] = m[\text{BE}] \end{cases} \Rightarrow (\text{A,B})\ \mathscr{R}\ (\text{E,F})$$

La classe d'équivalence du bipoint (A,B) est le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.
C'est une façon de définir proprement un vecteur dans le plan.

3 Relation d'ordre

3.1 Définition

Définition 6 : Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Remarque : On note généralement une relation d'ordre : $\leqslant$, $\preccurlyeq$, $\precsim$, ...

La réflexivité est imposé dans la définition des relations d'ordre. On privilégie les relations d'ordre « large » du type « inférieur ou égal ».

La transitivité et l'antisymétrie permettent de hiérarchiser les éléments d'un ensemble.

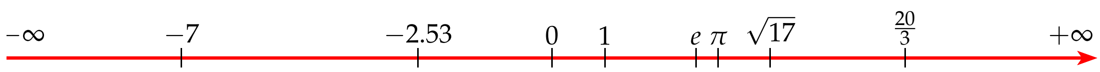
Exemples :

- Les relations $\leqslant, \geqslant$ sur $\mathbb{R}$ sont des relations d'ordre tandis que $<$ et $>$ ne le sont pas par manque de réflexivité.
- La relation de divisibilité $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ (mais pas sur $\mathbb{Z}^*$) :
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n|n$ donc $|$ est réflexive.
  - $n|n'$ et $n'|n \overset{\exists\, k,k' \in \mathbb{N}^*}{\Rightarrow} n = kn'$ et $n' = k'n \Rightarrow n = kk'\,n \Rightarrow kk' = 1$ $\overset{k,k' \in \mathbb{N}^*}{\Rightarrow} k = k' = 1 \Rightarrow n = n'$ donc $|$ est antisymétrique.
  - $n|n'$ et $n'|n'' \overset{\exists\, k,k' \in \mathbb{N}^*}{\Rightarrow} n = kn'$ et $n' = k'n'' \Rightarrow n'' = kk'\,n \Rightarrow n''|n$

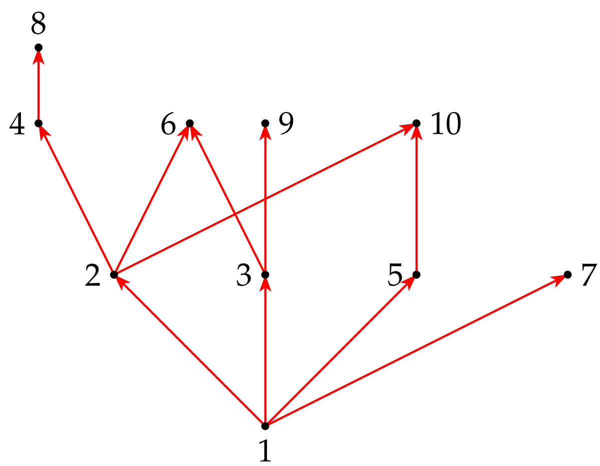
    donc $|$ est transitive.

Visualisation d'une relation d'ordre : idée d'orientation.

- Lorsque la relation d'ordre est totale comme $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$. On peut représenter $\mathbb{R}$ sur une droite



- Ce n'est plus le cas lorsque la relation d'ordre est partielle comme par exemple la relation de divisibilité $|$ dans $[\![1, 10]\!]$. Dans ce graphe, on se préoccupe uniquement de l'orientation des entiers de 1 à 10.



3.2 Relation stricte associée à une relation d'ordre

Définition 7 : Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

La relation $\prec$ sur E définie par : $\forall x, y \in E,\ x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$ est antisymétrique et transitive, est appelée la relation stricte associée à $\preccurlyeq$

4 Éléments fondamentaux d'un ensemble ordonné

4.1 Majorant, minorant

Définition 8 : Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et F une partie de E.

- On dit que F est majorée pour $\preccurlyeq$ s'il existe $M \in E$ tel que :
$$\forall x \in F, \quad x \preccurlyeq M$$
On dit que M est un majorant de F ou que F est majoré par M.
- On dit que F est minorée pour $\preccurlyeq$ s'il existe $m \in E$ tel que :
$$\forall x \in F, \quad m \preccurlyeq x$$
On dit que M est un minorant de F ou que F est minorée par m.
- Si F est minorée et majorée alors F est bornée pour $\preccurlyeq$

Remarque : Il n'y a pas d'unicité pour le majorant et le minorant.

Exemples :

- $F = \{2, 10, 12\}$ est minoré par 2 et majorée par 120 pour la relation de divisibilité sur $E = \mathbb{N}$.
- $\mathscr{P}(E)$ est minoré par $\varnothing$ et majoré par E pour la relation $\subset$ sur lui-même.

4.2 Plus grand et plus petit élément

Définition 9 : Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et F une partie de E.

- On appelle plus grand élément de F ou maximum de F tout élément de F qui majore F.

  S'il en existe un, cet élément est unique et appelé le plus grand élément de F. Il est noté $\max F$.
- On appelle plus petit élément de F ou minimum de F tout élément de F qui minore F.

  S'il en existe un, cet élément est unique et appelé le plus petit élément de F. Il est noté $\min F$

Exemples : Avec la relation de divisibilité $|$ sur $E = \mathbb{N}^*$.

- $F = \{2, 3, 6\}$ possède un plus grand élément 6 mais pas de plus petit élément.
- $F = \mathbb{N}^*$ possède un plus petit élément 1 mais pas de plus grand élément.
- $F = \mathbb{N}^* - \{1\}$ ne possède ni plus petit ni de plus grand élément.

4.3 Borne supérieure et borne inférieur

Définition 10 : Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et F une partie de E.

- Il existe une borne supérieure de F (unique) pour $\preccurlyeq$ s'il existe un plus petit majorant de F, notée $\sup F$.
- Il existe une borne inférieure de F (unique) pour $\preccurlyeq$ s'il existe un plus grand minorant de F, notée $\inf F$.

Remarque : La borne inférieure et la borne supérieure de F n'appartiennent pas nécessairement à F.

Exemple : $F = \{6, 8, 10\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure pour la relation de divisibilité $|$ sur $E = \mathbb{N}^*$ et .

$$\sup F = \text{ppcm}(6, 8, 10) = 120 \notin F \quad \text{et} \quad \inf F = \text{pgcd}(6, 8, 10) = 2 \notin F$$

Théorème 2 : Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et F une partie de E.

Si F possède un plus grand (resp. petit) élément pour $\preccurlyeq$, alors F admet une borne supérieure (resp. inférieure) pour $\preccurlyeq$ et :

$$\sup F = \max F \quad (\text{resp } \inf F = \min F)$$

Exemple : $\mathscr{P}(E)$ admet un plus petit et un plus grand élément au sens de l'inclusion $\subset$ qui sont $\varnothing$ et E. Ils correspondent alors aux bornes de $\mathscr{P}(E)$