Structure d'espace vectoriel

Table des matières

1 Introduction

Comme son nom l'indique, la notion d'espace vectoriel est basé sur nos vecteurs dans le plan ou l'espace que nous avons rencontrés dans les classes de lycée. On a introduit la structure d'espace vectoriel parce que cette structure est présente partout en mathématiques
Il s'agit de généraliser la structure que nous avons vue en géométrie pour qu'elle puisse s'appliquer à d'autres objets mathématiques (polynômes, fonctions, suites, matrices,...).

L'idée essentiel dans un espace vectoriel est la notion de combinaison linéaire que l'on rencontre dans de nombreux domaines mathématiques (arithmétique, analyse, géométrie)

Enfin la notion d'espace vectoriel est basé sur la notion de stabilité : la combinaison de deux éléments d'un ensemble est encore dans cet ensemble.

2 Espaces vectoriels

2.1 Définitions

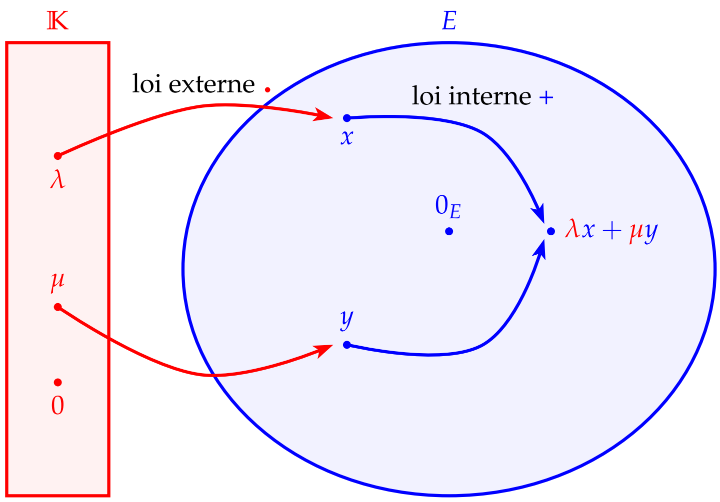
Comme nous allons le voir dans la définition, pour définir un espace vectoriel, nous avons besoin de deux ensembles :

- Un corps $\mathbb{K}$ pratiquement : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Un ensemble E qui peut être très varié : ensemble de nombres, de fonctions, de suites, de matrices, de polynômes, de n-uplets ...
  Cet ensemble E muni de la loi de composition interne $+$ appelée addition vectorielle doit être un groupe commutatif : c'est à dire que la loi $+$ est commutative, associative, E possède un élément neutre 0_E et tout élément x de E possède un symétrique noté $(-x)$ appelé opposé. On écrit $(E, +)$ est un groupe commutatif.

Définition 1 : L'ensemble E a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsque :

- $(E, +)$ est un **groupe commutatif** dont on note l'élément neutre 0_E ou 0 et appelé vecteur nul.
- L'ensemble E est muni d'une loi de composition externe, admettant le corps $\mathbb{K}$ comme domaine d'opérateurs, noté « . » appelé multiplication par un scalaire. Cette loi est définie par une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E qui au couple (λ, x) où λ est un élément de $\mathbb{K}$ et x un élément de E associe un élément de E noté $\lambda.x$ ou λx. Cette application est telle que :
  1) $\forall x \in E \; : \; 1.x = x$
  2) $\forall x, y \in E, \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \; : \; \lambda.(x + y) = (\lambda.x) + (\lambda.y)$
  3) $\forall x \in E, \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; : \; (\lambda + \mu).x = (\lambda.x) + (\mu.x)$
  4) $\forall x \in E, \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; : \; \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelé **vecteurs**. Les éléments de $\mathbb{K}$ interagissant sur les vecteurs x sont appelés des scalaires



Remarque : On dit aussi que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- L'étude des espaces vectorielles s'appelle l'*algèbre linéaire*.
- Généralement en algèbre linéaire, on ne met pas de flèches sur les vecteurs. On continue cependant d'en mettre quand on fait de la géométrie classique dans le plan ou l'espace.
- La propriété 1) de la loi externe traduit que 1 est l'élément neutre du corps $\mathbb{K}$. Quant aux propriétés 2), 3), 4) elles traduisent une « sorte » de distributivité et d'associativité mais qui n'en sont pas vraiment car les éléments ne sont pas dans le même ensemble. On parle alors de bilinéarité. Ces quatre propriétés semblent « naturelles » car elles s'appliquaient déjà à nos vecteurs en géométrie classique.
- Les conditions d'un espace vectoriel peuvent paraître lourdes à vérifier, mais la plupart du temps, on montrera que $E(,+,.)$ est un espace vectoriel grâce aux propriétés qu'il doit vérifier pour être un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel plus grand de référence.
- L'idée principale est que E possède un élément neutre 0_E et que pour tous vecteurs x et y la combinaison linéaire $\lambda x + \mu y$ est encore dans E.

2.2 Exemple

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un espace vectoriel sur lui-même. Il suffit de considérer la multiplication $\times$ comme une loi externe. Il est assimilable à une droite vectorielle.
- De même $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ont une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Ils sont assimilable aux vecteurs du plan et de l'espace.
- L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 , $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Il en est de même de l'ensemble des matrices np : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$
- L'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}[X]$, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- L'ensemble des suites réelles, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : L'ensemble des n-uplets, $\mathbb{R}^n$, muni de la loi de composition interne « + », et de loi externe sur $\mathbb{R}$, « . » tel que :

$$\begin{aligned}\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda.X + \mu.Y &= \lambda.(x_1\ ,\ x_2\ ,\dots,\ x_n) + \mu.(y_1\ ,\ y_2\ ,\dots,\ y_n)\\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1\ ,\ \lambda x_2 + \mu y_2\ ,\dots,\ \lambda x_n + \mu y_n)\end{aligned}$$

forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$

Propriété 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
- $\forall x \in E,\ \ -x = (-1).x$ où $(-x)$ est l'opposé de x dans E et (-1) l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$

2.3 Combinaisons linéaires

Définition 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de E.
On appelle combinaison linéaire de $x_1, x_2, \dots, x_n$ tout vecteur u de E de la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

L'ensemble $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$ des combinaisons linéaires des éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ de E est un espace vectoriel.

Exemple : Vect$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$
Il forme alors un espace vectoriel.

2.4 Sous-espace vectoriel

Théorème 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F une partie non vide de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si et seulement si :

- $0_E \in F$
- F est **stable** c'est à dire : $\forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \lambda y \in F$

Exemples :

- $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de polynômes $\mathbb{R}[X]$. En effet :
  1) Le polynôme nul est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
  2) La combinaison linéaire de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n
- L'ensemble des fonctions affines est un sous-espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet :
  1) La fonction nulle est bien une fonction affine.
  2) La combinaison linéaire de deux fonctions affines est une fonction affine.

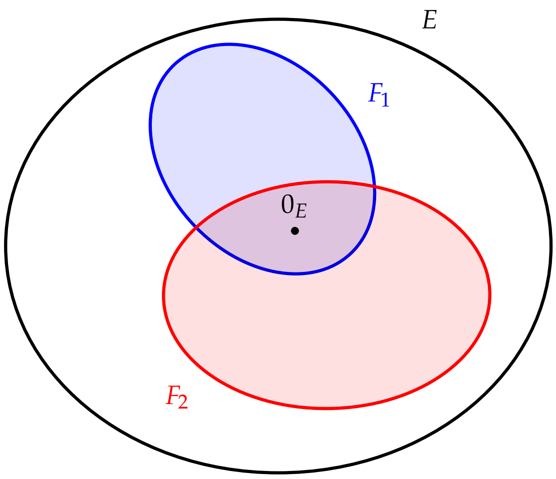
⚠ Pour montrer qu'un ensemble a une structure d'espace vectoriel, on montrera qu'il est le sous-ensemble vectoriel d'un ensemble connu.

Théorème 3 : L'intersection de deux sous-espaces d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel.

Démonstration : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

- $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$ donc $0_E \in F_1 \cap F_2$
- Stabilité :

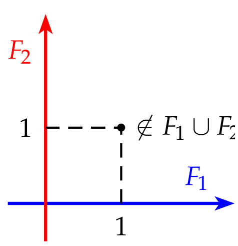
  $\forall x, y \in F_1 \cap F_2$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y \in F_1$ (car $x, y \in F_1$ et F_1 sous-espace vectoriel), de même $\lambda x + \mu y \in F_2$ donc $\lambda x + \mu y \in F_1 \cap F_2$



⚠ L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

En effet dans $\mathbb{R}^2$ considérons
l'ensemble F_1 des couples $(x, 0)$ donc $F_1 = \text{Vect}((1,0))$ et
l'ensemble F_2 des couples $(0, y)$ donc $F_2 = \text{Vect}((0,1))$.
F_1 et F_2 sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

$(1,0)$ et $(0,1)$ sont donc deux vecteurs de $F_1 \cup F_2$ mais
$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin F_1 \cup F_2$.
L'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas stable.



3 Famille génératrice, liée, libre et base

3.1 Famille génératrice

Définition 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
La famille X de E telle que $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E si tout vecteur u de E est une combinaison linéaire de X. On a ainsi : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $E = \text{Vect}(X)$.

⚠ Cette combinaison linéaire n'est pas nécessairement unique.
En effet la famille $((1,1)\,;\,(1,2)\,;\,(2,1))$ est une famille génératrice de E mais :
$(3,3) = 3(1,1)$ ou $(3,3) = 1(1,2) + 1(2,1)$

Exemples :

- Deux vecteurs non colinéaires du plan engendre le plan.
- Trois vecteurs non coplanaires de l'espace engendre l'espace.
- La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, i.e. $\mathbb{K}_n[X]$
- La famille $(1, i)$ engendre l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
- Une fonction constante non nulle et la fonction identité ($f(x) = x$) engendre l'espace vectoriel des fonctions affines.

3.2 Famille libre, famille liée

Définition 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
La famille X de E telle que $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est **libre** ou les vecteurs x_1, x_2,..., x_n sont linéairement **indépendants** si :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0, \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!]$$

La famille X de E telle que $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est **liée** ou les vecteurs x_1, x_2,..., x_n sont linéairement **dépendants** si on peut exprimer un vecteur x_i comme combinaison linéaire des autres.

$$\exists\, i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k x_k$$

Remarque : Si $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille libre alors on peut utiliser le principe d'identification :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i = \mu_i$$

Exemples :

- La famille $(1, i)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
  $\lambda.1 + \mu.i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0$ identification partie réelle et partie imaginaire
- La famille $((1,1)\ ;\ (1,2)\ ;\ (2,1))$ est une famille liée, en effet :
  $$(2,1) = 3(1,1) + (-1)(1,2)$$

3.3 Bases

Définition 5 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et B une famille de E.

La famille B forme une **base** de E si la famille B est à la fois **libre et génératrice** de E

Remarque : Si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E alors tout vecteur u de E est décomposable en une unique combinaison linéaire de e_1, e_2,...,e_n.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ sont les coordonnées de } u$$

Exemple : Montrons que $B = ((1,1); (1,2))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$

Soit (x, y) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. Déterminons les réels λ et μ tels que :

$(x,y) = \lambda(1,1) + \mu(1,2) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (\lambda, \lambda) + (\mu, 2\mu)$.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x & (1) \\ \lambda + 2\mu = y & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = y - x & (2)-(1) \\ \lambda = x - \mu & (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2x - y \\ \mu = -x + y \end{cases}$$

$(x,y) = (2x - y)(1,1) + (-x + y)(1,2)$.

Tout élément de $\mathbb{R}^2$ peut se décomposer en une combinaison linéaire de $(1,1)$ et $(1,2)$ et cette décomposition est unique. La famille B est libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$. La famille B est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Les coordonnées de (x,y) dans la base B sont $(2x - y\ , -x + y)$

Remarque : Mais ce n'est pas la base la plus simple.
En effet la base $B_c = ((1,0), (0,1))$ est plus simple : $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.

La base B_c est appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.

Définition 6 : **Bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$

- Famille de n-uplets. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Polynômes de degré inférieurs ou égaux à n. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$
- Polynômes de degré quelconque. la famille $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition

Définition 7 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice de n éléments. Dans le cas contraire E est de dimension infinie.

Exemples :

- Les espaces $\mathbb{K}^n$ et $K_n[X]$ sont de dimension finie.
- L'espace $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie

Théorème 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si E est engendré par une famille de n éléments alors toute famille libre possède au plus n éléments

Remarque : Ce théorème est fondamental car il va permettre l'algorithme suivant permettant d'exhiber une base.

4.2 Algorithme de la base incomplète

Théorème 5 : Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont libres alors il existe une base constituée des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et de certains vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$

Entrée : on rentre les p premiers vecteurs dans B.
On initialise le compteur I à p.

Traitement : On forme la famille constituée de B et d'un vecteur parmi ceux de $p+1$ à n. Si cette famille forme une famille libre, on incrémente I et l'on rajoute ce vecteur dans $\mathscr{B}$.

Sortie : B engendre alors E car les autres vecteurs de la famille génératrice sont combinaison linéaire des vecteurs de B. B est libre et génératrice, B est donc une base de E. Elle possède I vecteurs.

```
Variables : I : entier,  B : liste
            x1, x2, ..., xn : vecteurs
Entrées et initialisation
    pour k de 1 à p faire
        xk → B(k)
    fin
    p → I
Traitement
    pour k de p+1 à n faire
        si  B + xk  libre  alors
            I + 1 → I
            xk → B(I)
        fin
    fin
Sorties : Afficher B, I
```

Remarque : On formerait une base différente en prenant au départ p vecteurs différents parmi les n de la famille génératrice.

4.3 Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite

Théorème 6 : Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E
- De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base finie de E

Remarque : Si $E = \{0_E\}$ aucune famille de E est libre. E ne possède pas de base.

Démonstration :

- Soit L une famille libre de E. En appliquant l'algorithme de la base incomplète, on peut former une base en rajoutant à L des vecteurs d'une famille génératrice.

- Réciproquement soit G une famille génératrice de E. En appliquant l'algorithme de la base incomplète en partant du premier vecteur de G et en rajoutant les autres vecteurs en éliminant ceux qui ne forme pas une famille libre avec ceux déjà retenus. La base obtenu est une sous famille de G.

4.4 Dimension

Définition 8 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $E = \{0_E\}$ la dimension de E est 0 et l'on note $\dim(E) = 0$.
- Si $E \neq \{0_E\}$, toute les base de E ont le même nombre n de vecteurs. Ce nombre n est la dimension de E et l'on note $\dim(E) = n$

Remarque :

- Si $\dim(E) = 1$, on dit que E est une droite vectorielle.
- Si $\dim(E) = 2$, on dit que E est un plan vectoriel.

Théorème 7 : Dimension des espaces vectoriel $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \quad \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1, \quad \dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$$

Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ alors $E \times F$ est un espace vectoriel et
$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

⚠ $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ car on va du polynôme de degre 0 au polynôme de degré n.

Théorème 8 : Dans un espace vectoriel E de dimension n, toute famille libre possède au plus n éléments et une famille génératrice au moins n.

Démonstration : Une base B de E possède n éléments. Si X est une famille libre et Y une famille génératrice de E, alors X possède au plus autant d'élément que B et Y au moins autant d'élément que B.

Théorème 9 : Caractérisation d'une base d'un espace E de dimension n.

Une famille X de n vecteurs est un base de E si, et seulement si X est libre ou bien X est génératrice de E.

Remarque : Ce théorème est immédiat car une base d'un espace de dimension n possède n vecteurs. Une famille libre de n vecteurs engendrera E de même si une famille de n vecteurs engendre E alors cette famille est libre.

Exemple : La famille $X = ((1,3)\ ,\ (2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension 2 donc comme X a deux éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle soit une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\lambda(1,3) + \mu(2,1) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 3\lambda + \mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu = 0$$

X est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 10 : Soit F un sous-espace vectoriel de E alors :

$$\dim F \leqslant \dim E \quad \text{égalité si} \quad F = E$$

5 Somme de deux sous-espaces vectoriels

5.1 Définition

Définition 9 : Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

L'ensemble des éléments $(u+v)$ où u et v sont respectivement éléments de F et G est appelé somme des sous-espaces F et G. Cette somme est notée $F+G$.

- L'ensemble $F+G$ est un sous-espace de E.
- $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G.

Démonstration : Montrons que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E :

- $0_E = 0_E + 0_E$ et comme 0_E est dans F et G alors $0_E \in F+G$.
- Soit $w = u+v$ et $w' = u'+v'$ deux éléments de $E+F$.

$$\lambda w + \mu w' = \lambda(u+v) + \mu(u'+v') = \lambda u + \lambda v + \mu u' + \mu v' = (\underbrace{\lambda u + \mu u'}_{\in F}) + (\underbrace{\lambda v + \mu v'}_{\in G})$$

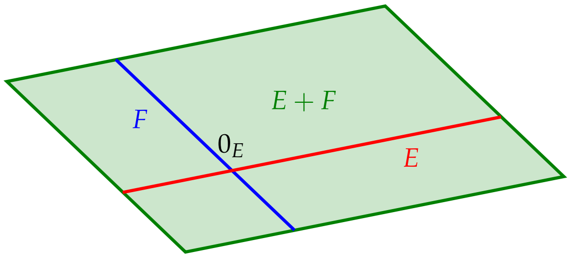
Donc pour tous scalaires λ et μ, $\lambda w + \mu w' \in F+G$.

$F+G$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

Montrons que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

- $F+G$ contient F et G. Il suffit pour cela de prendre les vecteurs de $F+G$ de la forme $u+0_E$ et 0_E+v.
- Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant F et G.

  Si $u \in F$ alors $u \in H$ et si $v \in G$ alors $v \in H$.
  Toute combinaison linéaire d'éléments de H est élément de H, donc $u+v \in H$ et donc $F+G \subset H$



⚠ Ne pas confondre $F \cup G$ qui n'est pas un espace vectoriel et $F+G$

Exemple : La somme des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$, $\text{Vect}((1,0,0))$ et $\text{Vect}((0,1,0))$ est le plan d'équation $z=0$. En effet

$F+G = \text{Vect}((1,0,0)) + \text{Vect}((0,1,0)) = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) = \{(x,y,0)\}_{x,y\in\mathbb{R}}$

5.2 Somme directe

Définition 10 : Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

On dit que F et G sont en somme directe si la décomposition d'un vecteur de $F+G$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique.

$$\forall u,u' \in F,\ \forall v,v' \in G, \quad u+v=u'+v' \quad \Rightarrow \quad u=u' \text{ et } v=v'$$

On note alors $F \oplus G$ la somme directe de F et G.

Théorème 11 : Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{0_E\}$

Démonstration :

- F et G sont en somme directe et soit x un élément de $F \cap G$.

  On peut décomposer x en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G en $x+0_E$ et 0_E+x.

  $x+0_E = 0_E+x \overset{\oplus \text{ unicité}}{\Rightarrow} x=0_E$
- Réciproquement, on a $F \cap G = \{0_E\}$.

  Soient $u,u' \in F$ et $v,v' \in G$ tels que $u+v=u'+v' \Leftrightarrow u-u'=v'-v$

  $(u-u')$ et $(v'-v)$ sont éléments de $F \cap G$ et donc $u-u'=0$ et $v'-v=0$ ce qui entraîne $u=u'$ et $v=v'$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^3$.

- Soit F le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$
- et G la droite vectorielle définie par $x = y = z$.

On peut écrire $F = \text{Vect}((1\,,-1\,,\,0),(0\,,-1\,,\,1))$ et $G = \text{Vect}((1\,,\,1\,,\,1))$.

Donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=y=z=0 \quad \Leftrightarrow \quad F \cap G = \{(0,0,0)\}$$

F et G sont donc en somme directe.

5.3 Supplémentaires d'un espace vectoriel

Définition 11 : Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E ou que G est **un** supplémentaire de F dans E si, et seulement si on a l'un des assertions suivantes :

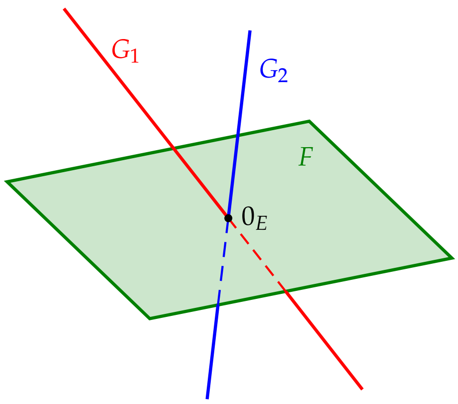
- $\forall x \in E,\ \ \exists!(u,v) \in F \times G,\ \ x = u + v$
- $F \oplus G = E$

⚠ Le supplémentaire de F dans E n'est pas unique.

Pour s'en convaincre.

Soient $E = \mathbb{R}^3$, F le plan vectoriel et les droites vectorielles G_1 et G_2 définis sur la figure ci-contre.

G_1 et G_2 sont deux supplémentaires du plan F dans $\mathbb{R}^3$.



Théorème 12 : Soit F un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension fini, alors F possède un supplémentaire G dans E.

On a alors : $\dim G = \dim E - \dim F$

Démonstration :

- Si $F = \{0_E\}$, alors $G = E$
- Si $F \neq \{0_E\}$, F possède une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ que l'on peut compléter en une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E d'après le théorème de la base incomplète. On pose alors $G = \text{Vect}(e_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$. On a alors $E = F + G$ et F et G sont en somme directe et donc G est un supplémentaire de F.
- La relation sur la dimension est alors une conséquence de la construction de G.

Exemple :

- Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes pairs de $\mathbb{R}_n[X]$.
- On suppose que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
  Déterminer un supplémentaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrons que l'ensemble $\mathcal{Q}$ des polynômes impaires de $\mathbb{R}_n[X]$ est un supplémentaire de $\mathcal{P}$.

- Soit $r \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, on a alors :
$$\begin{cases} r(-X) = r(X) \\ r(-X) = -r(X) \end{cases} \Rightarrow r(X) = -r(X) \Rightarrow r(X) = 0$$
  Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{0\}$.
- **Analyse** : Supposons qu'un élément r de $\mathbb{R}_n[X]$ peut se décomposer en un élément p de $\mathcal{P}$ et un élément q de $\mathcal{Q}$. On a alors :
$$\begin{cases} r(X) = p(X) + q(X) \\ r(-X) = p(-X) + q(-X) \end{cases} \overset{p \text{ pair } q \text{ impair}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r(X) = p(X) + q(X) \\ r(-X) = p(X) - q(X) \end{cases}$$
  On en déduit alors : $p(X) = \dfrac{r(X) + r(-X)}{2}$ et $q(X) = \dfrac{r(X) - r(-X)}{2}$
- **Synthèse** : Soit un élément r de $\mathbb{R}_n[X]$,
  on pose alors $p(X) = \dfrac{r(X) + r(-X)}{2}$ et $q(X) = \dfrac{r(X) - r(-X)}{2}$
  On vérifie aisément que p est pair et que q est impair. Donc : $r = \underbrace{p}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{q}_{\in \mathcal{Q}}$

  On a alors : $\mathbb{R}_n[X] = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$. $\mathcal{Q}$ est donc un supplémentaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.