Représentation matricielle des applications linéaires

Table des matières

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1 : E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions resp. p et n.

$B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E

$B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle matrice de f dans B et B', la matrice (n, p) de la famille : $f(B) = \big(u(e_1), \dots, u(e_p)\big)$ dans B'.

Elle est notée : $\text{Mat}_{B,B'}(f)$

Si $E = F$ et si $B = B'$, la matrice est notée $\text{Mat}_B(f)$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & & f(e_j) & & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow e'_1 \\ \\ \leftarrow e'_i \\ \\ \leftarrow e'_n \end{matrix} \\ \uparrow & \end{array}$$

coordonnées de $f(e_j)$ dans B'

Remarque : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n alors : $\text{Mat}_B(\text{Id}_E) = I_n$

Exemples :

- f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

  On a : $f(1) = 3X + 1$, $f(X) = 4X^2 + X$, $f(X^2) = 5X^2 + 4X + 2$

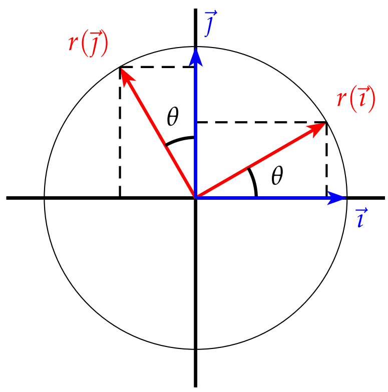
- Soit $\mathbb{R}^2$ de base canonique $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

  $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ.

  $r(\vec{\imath}) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$

  $r(\vec{\jmath}) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$ donc

  $\text{Mat}_{B,B}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



1.1 Matrice dans les bases canoniquement associées à A

Théorème 1 : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si on note φ l'application canoniquement associée à A et B_p et B_n, les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, alors : $A = \text{Mat}_{B_p,B_n}(\varphi)$

Exemple :

Soit φ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit les bases $B_1 = ((0,1),(1,0))$ et $B_2 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$.

Déterminer $\mathrm{Mat}_{B_1,B_2}(\varphi)$

- On détermine les images de $(0,1)$ et $(1,0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi((0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi((1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- On exprime ces deux vecteurs dans la base B_2 :

$$(0,1,1) = \overbrace{(1,1,1)}^{e_1} - \overbrace{(1,0,0)}^{e_3} \quad \text{donc} \quad (0,1,1) \xrightarrow{B_2} (1,0,-1)$$

$$(1,1,-1) = -\overbrace{(1,1,1)}^{e_1} + 2\overbrace{(1,1,0)}^{e_2} \quad \text{donc} \quad (1,1,-1) \xrightarrow{B_2} (-1,2,0)$$

- On obtient alors : $\mathrm{Mat}_{B_1,B_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2 Rang d'une application linéaire. Image d'un vecteur

Théorème 2 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dim. finies de bases respectives B et B'. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)\right)$

Démonstration :

$\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)\right) = \mathrm{rg}\left[\mathrm{Mat}_{B'}(f(B))\right] = \mathrm{rg}\left(f(B)\right) = \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}(f)$

Théorème 3 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dim. finies de bases respectives B et B', $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$.

On a alors : $\mathrm{Mat}_{B'}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) \times \mathrm{Mat}_B(x)$

Démonstration : Application de la linéarité de f.

- Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base E et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base F.
- Soit $X = \mathrm{Mat}_B(x)$ les coordonnées de x dans B.
- Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de f dans les bases B et B' : $A = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right) e'_i$$

Les coordonnées de $f(x)$ dans B' sont $\left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^{p} x_j a_{nj}\right)$

C'est à dire $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f) \times \mathrm{Mat}_B(x)$

Exemple : Déterminer le noyau et l'image en même temps par opérations sur les colonnes. Soit l'endomorphisme f de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((3,0,0),(0,1,2))$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((0,-2,\ 1))$

⚠ Si $E_3 = \mathbb{R}_2[X]$, on a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(3\ ,\ 2X^2 + X)$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2 - 2X))$

1.3 Matrice de la composée et de la réciproque

Théorème 4 : Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p, n et m et de bases respectives B, B' et B''. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$

- $\operatorname{Mat}_{B,B''}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{B',B''}(g) \times \operatorname{Mat}_{B,B'}(f)$
- f isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Mat}_{B,B'}(f^{-1}) = [\operatorname{Mat}_{B,B'}(f)]^{-1}$

Théorème 5 : Matrice de Vandermonde

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont distincts.

Démonstration : Par double implications :

- Si deux des scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont égaux alors la matrice de Vandermonde A possède deux lignes identiques et donc n'est pas inversible.
- Réciproquement, supposons $x_1, \dots, x_n$ distincts et notons l'application linéaire :

$$\varphi \ : \ \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] \longrightarrow K^n \\ \qquad P \quad \longmapsto (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0 \quad &\Rightarrow \quad P \text{ possède } n \text{ racines distinctes et } d^\circ P \leqslant (n-1) \\ &\Rightarrow \quad P = 0 \end{aligned}$$

φ est donc injective et comme $\dim \mathbb{K}_{n-1}[X] = \dim K^n = n$, φ est bijective donc φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

La matrice de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{K}^n$ est alors la matrice de Vandermonde qui est donc inversible.

1.4 Exemple

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$

Montrer qu'il existe une base B de E telle que : $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Analyse de la matrice** :

  D'après la matrice que l'on doit obtenir, si l'on appelle $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base de E considérée. On doit avoir $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1$.

- **Synthèse** :

  $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Rightarrow \quad f(\text{Im}\, f) = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \text{Im}\, f \subset \text{Ker}\, f \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}(f) \leqslant \dim \text{Ker}\, f$

  D'après le théorème du rang : $\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker}\, f \quad \Rightarrow$

  $\dim E \leqslant 2\text{Ker}\, f \quad \Rightarrow \quad 2\text{Ker}\, f \geqslant \dim E \quad \Rightarrow \quad \text{Ker}\, f \geqslant \dfrac{\dim E}{2} \quad \Rightarrow \quad \dim \text{Ker}\, f \geqslant \dfrac{3}{2}$

  or $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $\dim \text{Ker}\, f < 3$, on en conclut que $\dim \text{Ker}\, f = 2$

  Soit $e_3 \in E/\text{Ker}\, f$ et posons $f(e_3) = e_1$.

  On a $f\,[f(e_3)] = 0 = f(e_1)$ par hypothèse donc $e_1 \in \text{Ker}\, f$.

  Complétons par e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\text{Ker}\, f$.

  On obtient alors la matrice voulue.

2 Changements de bases, équivalence et similitude

2.1 Changement de bases

Théorème 6 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et B, B' et B'' trois bases de E.

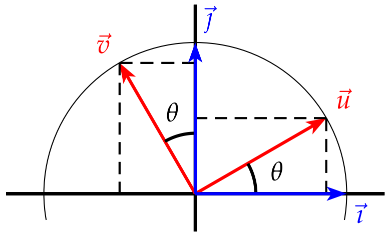
La matrice de passage de B à B' est la matrice : $P_B^{B'} = \text{Mat}_B(B') = \text{Mat}_{B,B'}(\text{Id}_E)$.

- $P_B^{B'}$ est inversible et $\left(P_B^{B'}\right)^{-1} = P_{B'}^{B}$ • $P_B^{B'} P_{B'}^{B''} = P_B^{B''}$
- Pour tout $x \in E$ de coordonnées X dans B et X' dans B', on a : $X = P_B^{B'} X'$

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons :

- la base canonique $B_c = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- et la base $B_\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ comme indiquée sur la figure.



On a : $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$ donc $P_{B_c}^{B_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Ainsi : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix}$

$\det(P_{B_c}^{B_\theta}) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{B_\theta}^{B_c} = \left(P_{B_c}^{B_\theta}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Ainsi : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$

Théorème 7 : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

- B_1 et B_2 deux bases de E et B'_1 et B'_2 deux bases de F.
- On pose $P = P_{B_1}^{B_2}$ et $Q = P_{B'_1}^{B'_2}$
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on pose $A = \mathrm{Mat}_{B_1, B'_1}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{B_2, B'_2}(f)$

Alors : $A' = Q^{-1}AP$

Démonstration :

A' matrice qui va de (E, B_2) dans (F, B'_2),
on applique donc P puis A puis Q^{-1}

En effet

$f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_F \circ f \quad \Leftrightarrow \quad AP = QA' \quad \Leftrightarrow \quad A' = Q^{-1}AP$

$$\begin{tikzcd}
E, B_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}_E, P"] \arrow[d, "f, A'"'] & E, B_1 \arrow[d, "f, A"] \\
F, B'_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}_F, Q"'] & F, B'_1
\end{tikzcd}$$

Remarque : Dans un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et B_1 et B_2 deux base de E :

$A = \mathrm{Mat}_{B_1}(f)$, $A' = \mathrm{Mat}_{B_2}(f)$, $P = P_{B_1}^{B_2}$ alors $A' = P^{-1}AP$

Théorème 8 : Matrice de rang r. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions respectives p et n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ de rang r.

Il existe un couple de base B de E et B' de F telles que $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration :

Peut-on trouver $B = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $B' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telles que $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

- Pour que les $p-r$ colonnes de $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$ soient nulles, il faut que $e_{r+1}, \dots, e_p$ soient éléments de $\mathrm{Ker}\, f$.

  D'après le théorème du rang : $\mathrm{rg}(\mathrm{Ker}\, f) = p - r$, on peut choisir $e_{r+1}, \dots, e_p$ famille libre de $\mathrm{Ker}\, f$ et compléter $e_1, \dots, e_r$ pour former une base B de E.

- Pour que les colonnes de $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$ correspondent à I_r, il suffit de poser $f(e_j) = e'_j$ pour $j \in [\![1, r]\!]$ puis compléter $e'_{r+1}, \dots, e_n$ en une base B' de F.

  La famille $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ par construction engendre un supplémentaire I de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E donc $f_{|I}$ est un isomorphisme de I sur $\mathrm{Im}\, f$ et donc $\left(f(e_j) = e'_j\right)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une famille libre.

On a bien trouver un couple de bases B de E et B' de F.

2.2 Matrices équivalentes

Définition 2 : $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On dit que B est équivalente à A s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = Q^{-1}AP$.
- Si, à partir d'opérations élémentaires sur A, on obtient une matrice B alors les matrices A et B sont équivalentes.
- Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si A et B représentent la même application linéaire dans deux couples de bases.

Théorème 9 : Soit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par « être équivalente à ».

- La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
- Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Démonstration : $\mathscr{R}$ relation d'équivalence. Soit $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- Réflexivité : $A = (I_n)^{-1} A I_p$ donc $A \mathscr{R} A$
- Symétrie : $A \mathscr{R} B \Rightarrow B = Q^{-1}AP \Rightarrow QBP^{-1} = A \Rightarrow B \mathscr{R} A$
- Transitivité :

$$\begin{cases} A \mathscr{R} B \\ B \mathscr{R} C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = Q^{-1}AP \\ C = Q'^{-1}BP' \end{cases} \Rightarrow C = Q'^{-1}(Q^{-1}AP)P' = (QQ')^{-1}A(PP') \Rightarrow A \mathscr{R} C$$

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Notons φ l'application canoniquement associée à A. D'après le théorème précédant, il existe un couple de bases B de $\mathbb{K}^n$ et B' de $\mathbb{K}^p$ tels que $\mathrm{Mat}_{B,B'}(A) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$ donc A et J_r sont équivalentes.

Théorème 10 : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : \ \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$

2.3 Matrices extraites

Théorème 11 : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $m \in [\![0, n-1]\!]$ et $q \in [\![0, p-1]\!]$.

- Une matrice extraite ou sous-matrice de A est une matrice B obtenue en supprimant m lignes et q colonnes de A. On a alors $B \in \mathcal{M}_{n-m,p-q}(\mathbb{K})$.
- Pour toute matrice B extraite de A, on a : $\operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(A)$.
- **Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.**

  Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles qu'on peut extraire de A.

Démonstration :

- Notons B' la matrice intermédiaire obtenue par suppression de q colonne de A. On passe ensuite de B' à B par suppression m lignes.

  Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rg}(A) \geqslant \operatorname{rg}(B') \text{ et } \operatorname{rg}(B') = \operatorname{rg}({}^tB') \\ \operatorname{rg}({}^tB') \geqslant \operatorname{rg}({}^tB) \text{ et } \operatorname{rg}({}^tB) = \operatorname{rg}(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geqslant \operatorname{rg}(B)$$

- Caractérisation du rang de A : on peut reformuler ainsi

$$\operatorname{rg}(A) \geqslant r \quad \Leftrightarrow \quad \text{Il existe une matrice extraite de A inversible de taille } r$$

  Soit $\operatorname{rg}(A) \geqslant r$. On peut alors extraire une famille libre de r colonnes de A formant une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

  De même, on peut extraire de ${}^tB$ une famille libre de r colonnes formant une matrice $C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

  La matrice ${}^tC$ est une matrice carrée extraite de A inversible de taille r.

  Réciproquement si on peut extraire une matrice B inversible de taille r alors $\operatorname{rg}(A) \geqslant \operatorname{rg}(B) = r$

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Par suppression de la 1re colonne et de la première ligne, on obtient $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

qui est inversible car triangulaire de coefficients diagonaux non nuls.

On a alors $\operatorname{rg}(A) \geqslant 3$

2.4 Matrices semblables et trace d'un endomorphisme

Définition 3 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. n.

On dit que B est semblable à A s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible pour laquelle : $B = P^{-1}AP$.

Si A et B représente le même endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans un couple de base de E alors A et B sont semblables.

⚠ Si A et B semblables alors A et B équivalentes mais la réciproque est fausse.

En effet des matrices semblables sont carrées et représentent un endomorphisme.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons que A et B sont semblable. Il s'agit de déterminer 2 bases telles que A et B représente le même endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$.

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $b = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $b' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une autre base.

Supposons que f est canoniquement associé à A, on a alors :

$$f(e_1) = (0,0,0), \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_1 + e_3$$

On en déduit alors que : $f(4e_2) = 4e_2$ et $f(2e_3) = 2e_1 + 2e_3$.

On pose : $e'_1 = e_1$, $e'_2 = 4e_2$, $e'_3 = 2e_3$, on alors :

$$f(e'_1) = (0,0,0), \quad f(e'_2) = e'_2, \quad f(e'_3) = 2e'_1 + e'_3$$

B représente f dans la base b'. Les matrices A et B sont semblables.

Théorème 12 : Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par « être semblable à »

- La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

Démonstration :

- Pour la relation d'équivalence même démonstration qu'avec les matrices équivalentes.
- On rappelle que la trace d'une matrice carrées est la somme des coefficients diagonaux et que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

  A et B semblables donc $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\left[P^{-1}(AP)\right] = \mathrm{tr}\left[(AP)P^{-1}\right] = \mathrm{tr}(A)$

Définition 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

- La trace de la matrice $\mathrm{Mat}_B(f)$ ne dépend pas de la base B de E choisie.

  On l'appelle trace de f notée $\mathrm{tr}(f)$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\mathrm{tr}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{tr}(f) + \mu \mathrm{tr}(g)$ et $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$

Exemple : Soit f un endomorphisme de E de rang r.

Il existe alors une base B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{tr}(f) = r = rg(f)$

Remarque : Un projecteur p de E étant un endomorphisme, on a $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

3 Diagonalisation des matrices carrées

3.1 Valeurs propres

Définition 5 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle valeur propre de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$, i.e. pour lequel il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que : $AX = \lambda X$.

Ce vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

L'union de l'ensemble $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ de ces valeurs propres et du vecteur nul est appelé le sous-espace propre de A associée à la valeurs propre λ.

Remarque : $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

On en déduit alors que $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -(1+\lambda) & 3 & 3 \\ 3 & -(1+\lambda) & -3 \\ -3 & 3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & (1+\lambda)^2(5-\lambda) + 27 + 27 - 9(1+\lambda) - 9(1+\lambda) - 9(5-\lambda) = 0 \\
& (1+\lambda)^2(5-\lambda) + 54 - 9 - 9\lambda - 9 - 9\lambda - 45 + 9\lambda = 0 \\
& (1+\lambda)^2(5-\lambda) - 9(1+\lambda) = 0 \\
& (1+\lambda)[(1+\lambda)(5-\lambda) - 9] = 0 \\
& (1+\lambda)(5 - \lambda + 5\lambda - \lambda^2 - 9) = 0 \\
& (1+\lambda)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0 \\
& -(1+\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 2
\end{aligned}$$

A admet donc deux valeurs propres : -1 et 2

- $\lambda = 2$, on a $(A - 2I_3)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Ce système est équivalent à $-3x + 3y + 3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y + z$

  L'ensemble des vecteurs propres associé à la valeur propre 2 est le plan d'équation $x = y + z$ de vecteurs directeurs $(1,1,0)$ et $(1,0,1)$

• $\lambda = -1$, on a $(A + I_3)X = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \phantom{3x+{}} 3y + 3z = 0 \\ 3x \phantom{{}+3y} - 3z = 0 \\ -3x + 3y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phantom{3x+{}} 3y + 3z = 0 \\ 3x \phantom{{}+3y} - 3z = 0 \\ \phantom{3x+{}} 3y + 3z = 0 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = z \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs propres associé à la valeur propre (-1) est la droite de vecteur directeur $(1\,, -1,\, 1)$

3.2 Diagonalisation

Théorème 13 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est diagonalisable si $\mathbb{K}^n$ possède une base constituée de vecteurs propre de A.

Dans ce cas, si on note $(X_1, \dots, X_n)$ une telle base et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associés, et P la matrice de colonne $X_1, \dots, X_n$, alors :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exemple : Si on reprend $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

• $\lambda = 2$, on a $X_1 = (1, 1, 0)$ et $X_2 = (1, 0, 1)$ • $\lambda = -1$, on a $X_3 = (1\,, -1,\, 1)$

On obtient alors : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pour déterminer P^{-1}, on peut utiliser la méthode Gauss-Jordan

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{P} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

On a : $A = PDP^{-1}$, on peut par exemple calculer la puissance k de A :

$$A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{PDP^{-1} \times \cdots \times PDP^{-1}}_{k \text{ fois}} = PD^kP^{-1}$$

En posant $a_k = 2^k - (-1)^k$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & -2^k \\ -2^k & 2^k & 2 \times 2^k \\ (-1)^k & -(-1)^k & -(-1)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^k & a_k & a_k \\ a_k & (-1)^k & -a^k \\ -a_k & a_k & 2^k + a_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$