Chapitre 3 :

Musique et nombres

Objectifs :

- Calculer des puissances et des quotients en lien avec le cycle des quintes.
- Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.
- Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.

1. Hauteur et intervalle en musique

Définitions :

On appelle **hauteur** d'un son la **fréquence** de ce son. Plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu, et plus elle est basse, plus le son est grave. Exemple : le La3 à 440 Hz.

Les fréquences **harmoniques** correspondent aux **octaves**. C'est-à-dire que **si l'on double la fréquence** d'une note, on entend **la même note mais plus aigüe**, à l'octave supérieur. Exemple : le La4 est un La plus aigu que le La3, sa fréquence est de $2 \times 440 = 880$ Hz.

Un **intervalle** en musique est l'écart entre deux notes, c'est-à-dire le **facteur multiplicatif entre les deux fréquences**.

Ainsi on définit une **quinte** lorsque le rapport entre les deux fréquences est de $\frac{3}{2} = \mathbf{1,5}$.

Représentation graphique :

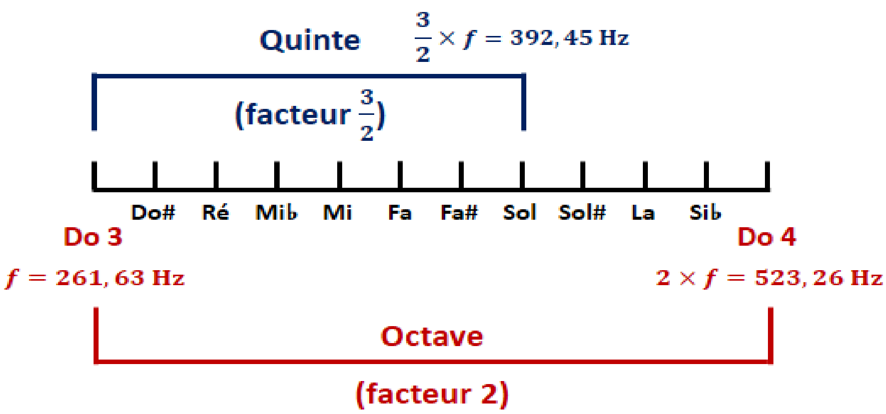


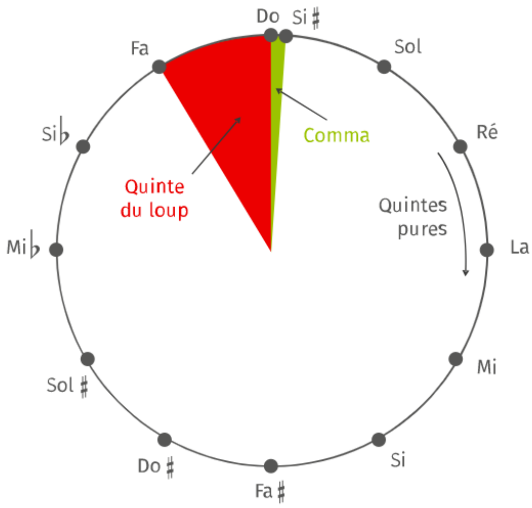
Figure représentant une octave de 12 demi-tons, avec l'intervalle octave (fréquence doublée) et la quinte (fréquence multipliée par 1,5).

2. Gamme de Pythagore

Définitions :

Pour définir sa gamme, Pythagore est parti d'une note, a pris sa quinte, puis la quinte de la quinte et ainsi de suite 12 fois jusqu'à retomber **à peu près** sur la même note mais à l'octave supérieure. La dernière note n'est pas exactement le double de la première en fréquence. Cet à peu près est corrigé et défini la **quinte du Loup** car elle est légèrement dissonante.

Si l'on répète ce cycle à l'infini, on ne retombe jamais exactement sur la bonne note ! Cela est dû à la méconnaissance des nombres irrationnels



3. Gamme tempérée de J.S Bach

Définitions :

Pour résoudre le problème de la quinte du Loup, il a fallu découper la gamme (une octave) en douze intervalles constants appelés **demi-tons**. On utilise alors la **racine douzième de 2** : $\sqrt[12]{2} = 1{,}059\ 463\ ...$

Si l'on multiplie 12 fois la racine 12ème de 2, on obtient le facteur 2 de l'octave :

$$\sqrt[12]{2} \times \sqrt[12]{2} \times ... \times \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$$

Application :

La fréquence correspondant au La 3 du diapason est de 440 Hz.

1. *Quelle sera alors la fréquence associée au La 4 de l'octave suivante? Du La 2 de l'octave précédente ?*
   L'octave suivante est définie par un facteur 2 sur la fréquence donc :
   $$f(La\ 4) = 2 \times f(La\ 3) = 2 \times 440 = 880 \text{ Hz}$$
   De même le La 2 aura une fréquence valant la moitié de celle du La 3 :
   $$f(La\ 2) = \frac{1}{2} \times f(La\ 3) = \frac{1}{2} \times 440 = 220 \text{ Hz}$$
2. Quelle sera la fréquence du Do 4 en sachant qu'il se trouve 3 demi-tons au-dessus du La 3 ?

   Puisque le Do 4 est 3 demi-tons au-dessus du La 3, il faut donc multiplier la fréquence du La 3 par $\left(\sqrt[12]{2}\right)^3$:
   $$f(Do\ 4) = \left(\sqrt[12]{2}\right)^3 \times f(La\ 3) = \left(\sqrt[12]{2}\right)^3 \times 440 = 523 \text{ Hz}$$
3. Quelle serait la valeur de la fréquence du Mi 4 dans la gamme de Pythagore, en sachant que le Mi 4 est la quinte du La 3 ? Et dans la gamme tempérée (une quinte correspond à 7 demi-tons)?
   Pour Pythagore : $f(Mi\ 4) = \frac{3}{2} \times f(La\ 3) = \frac{3}{2} \times 440 = 660\ Hz$
   Dans la gamme tempérée : $f(Mi\ 4) = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \times f(La\ 3) = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \times 440 = 659\ Hz$