Corrigé du baccalauréat ES de Nouvelle Calédonie de novembre 2010 obligatoire seulement

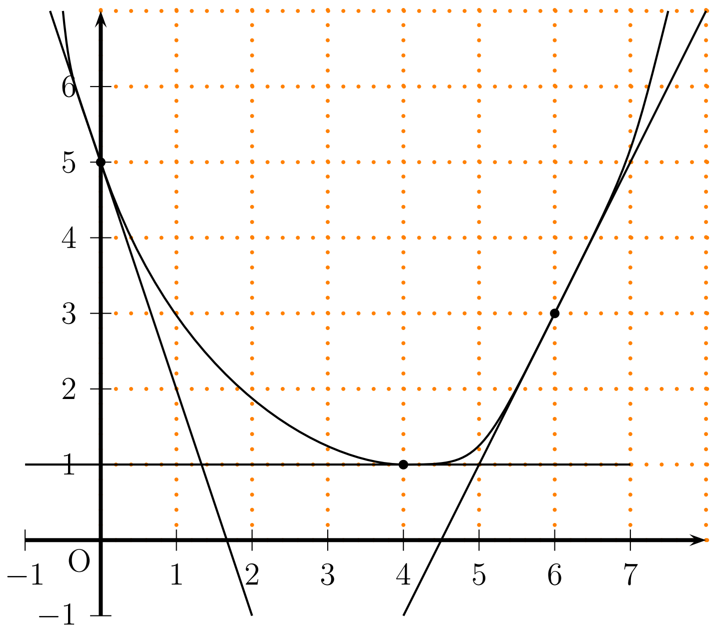
EXERCICE 1 (commun à tous les candidats) **6 points**

1. (a) **Tableau de variations de la fonction f**

x	0	4	6
$f(x)$	5 ↘	1	↗ 3

(b) **Équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 6 :**
$y = f'(6) \times (x-6) + f(6)$ soit $y = 2(x-6)+3$ et donc $\boxed{y = 2x - 9}$

(c) **Courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions de l'énoncé.**



2. Fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

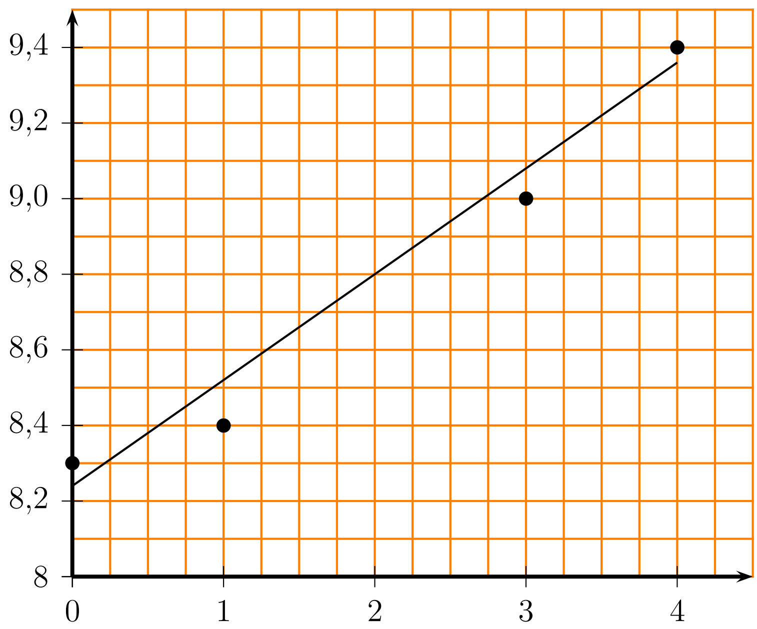
(a) **Sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.**
La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,6]$ donc la fonction e^f est dérivable sur $[0\,;\,6]$ pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;\,6]$, on a : $g'(x) = f'(x) \times e^{f(x)}$
On sait que pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;\,6]$, $e^{f(x)}$ est strictement positif, donc $g'(x)$ est du signe de $f'(x)$, par conséquent :
$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;\,4] \text{ et strictement croissante sur } [4\,;\,6]}$.
Tableau de variation de la fonction g.
x046variations de ge^5ee^3

(b) $g'(0) = f'(0) \times e^{f(0)} = \boxed{-3 \times e^5}$

EXERCICE 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) **6 points**

Partie A : Étude en pourcentages

1. **Nuage de points associé à la série statistique**



2. (a) **Équation de la droite D d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.** $\boxed{y = 0,28x + 8,24}$

   (b) **Droite D :** voir figure ci-dessus.

3. **Part des ménages dans le financement des soins et des biens médicaux en 2010.**
   En 2010, le rang est 6, donc on remplace x par 6 dans l'expression donnée par l'équation de la droite D : $0,28 \times 6 + 8,24 = 9,92$ On obtient bien $\boxed{9{,}92\ \%}$

Partie B : Étude en valeurs

1. **Somme versée par les ménages pour financer les soins et biens médicaux en 2004.**
   $\dfrac{140 \times 8,3}{100} \approx 11,62$ Cette somme est donc environ $\boxed{\text{11,62 milliards d'euros}}$

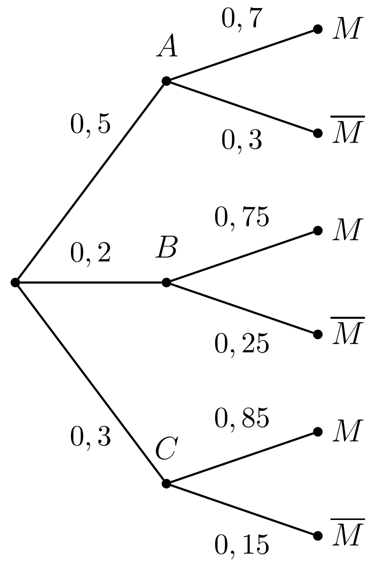
2. (a) **Dépense de soins et de biens médicaux en 2010.** $170,5 \times (1+0,03) \times (1+0,03) \approx 181$
   Cette dépense s'élève à environ $\boxed{\text{181 milliards d'euros}}$.

   (b) **Somme versée par les ménages pour le financement des soins et des biens médicaux en 2010.** $\dfrac{181 \times 9,92}{100} \approx 17,955$ Cette somme s'élève à environ $\boxed{\text{18 milliards d'euros}}$.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **Arbre pondéré**



2. **Probabilité que l'étudiant choisi soit de profil C et qu'il ait obtenu une note supérieure ou égale à 10.**
$p(C \cap M) = p(C) \times p_C(M) = 0,3 \times 0,85 = \boxed{0{,}255}$
3. **Démontrons que $P(\mathbf{M}) = 0,755$.**
D'après la formule des probabilités totales
$p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C)$
$p(M) = p(A) \times p_A(M) + p(B) \times p_B(M) + p(C) \times p_C(M)$
$p(M) = 0,5 \times 0,7 + 0,2 \times 0,75 + 0,3 \times 0,85$
$p(M) = \boxed{0{,}755}$
4. **Probabilité que l'étudiant soit de profil B sachant qu'il a obtenu une note strictement inférieure à 10.**
$p_{\overline{M}}(B) = \dfrac{p(\overline{M} \cap B)}{p(\overline{M})} = \dfrac{p(B) \times p_B(\overline{M})}{p(\overline{M})}$
Or : $p(B) = 0,2$ $\quad p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - 0,755 = 0,245$
D'autre part, dans l'arbre pondéré, les deux probabilités inscrites sur les branches issues de l'évènement B sont $p_B(M) = 0,75$ et $p_B(\overline{M})$ et on sait que dans ce cas la somme des deux probabilités est 1. Donc $p_B(\overline{M}) = 1 - 0,75 = 0,25$
On peut donc calculer $p_{\overline{M}}(B)$: $\quad p_{\overline{M}}(B) = \dfrac{0,2 \times ,25}{0,245} \approx \boxed{0{,}204}$
5. Dans ces 4 tirages indépendants, on peut obtenir exactement trois étudiants du profil C de 4 manières différentes :
$CCC\overline{C}$ ou $CC\overline{C}C$ ou $C\overline{C}CC$ ou $\overline{C}CCC$
Chacun de ces 4 évènement a la même probabilité qui est : $\quad 0,3^3 \times 0,7$
Donc la probabilité demandée est : $\quad 4 \times 0,3^3 \times 0,7 \approx \boxed{0{,}076}$

Exercice 4 (commun à tous les candidats) 5 points

Partie A

La fonction g est définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}$

1. **Variations de g sur $[1\ ;\ +\infty[$.**
   La fonction g est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et pour tout nombre x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a :
   $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > 0$ par conséquent $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } [1\ ;\ +\infty[.}$
2. **Résolution de l'équation $g(x) = 0$ dans $[1\ ;\ +\infty[$.**
   $\ln x - \dfrac{1}{2} = 0$ donc $\ln x = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{x = e^{\frac{1}{2}}}$
3. **En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{e}$.** $g(x) > 0$ signifie que $\ln x - \dfrac{1}{2} > 0$
   autrement dit $\ln x > \dfrac{1}{2}$ or $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \times \ln e = \ln(\sqrt{e})$
   donc $g(x) > 0$ signifie que $\ln x > \ln(\sqrt{e})$ autrement dit $\boxed{x > \sqrt{e}}$

Partie B

La fonction f est définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$

1. **Limite de f en $+\infty$.**
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = +\infty$
   or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x^2(\ln x - 1) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$
2. (a) **Montrons que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.**
   Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$
   on pose $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = \ln x - 1$ et on a $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
   et on a donc $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 4x \times (\ln x - 1) + 2x^2 \times \dfrac{1}{x}$
   $f'(x) = 4x\ln x - 4x + 2x = 4x\ln x - 2x = 4x(\ln x - \dfrac{1}{2}) = \boxed{4xg(x)}$

   (b) **Signe de $f'(x)$ et tableau de variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.**

   Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, le nombre x est strictement positif et comme $f'(x) = 4xg(x)$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$
   D'autre part, d'après la réponse à la question A3, $g(x) > 0$ si $x > \sqrt{e}$ et $g(x) < 0$ si $1 \leqslant x < \sqrt{e}$
   On obtient donc le tableau de variations ci-contre.

x	1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

3. (a) **Solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle [2 ; 3]**
   Calculons d'abord $f(2)$ et $f(3)$:
   $f(2) = 2 \times 2^2(\ln 2 - 1) + 2 \approx -0,45$ $f(3) = 3 \times 3^3(\ln 3 - 1) + 3 \approx 4,66$
   Donc $f(2) < 0 < f(3)$
   D'autre part la fonction f est continue et strictement croissante sur $[2\ ;3]$
   Donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique nombre α dans l'intervalle $[2\ ;3]$ tel que $f(\alpha) = 0$

(b) **Encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.**
$f(2,21) \approx -0,221$ et $f(2,22) \approx 0,00407$ donc $\boxed{2,21 < \alpha < 2,22}$