Correction du baccalauréat S Polynésie
10 juin 2010

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + b\text{i}$ où a et b sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - b\text{i}$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.
   Démonstrations par le calcul et par récurrence.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Calculons $(-z)(-z)(-z)(-z)(-z) = z^4 = -4$, donc $-z$ est aussi solution de l'équation (E).
   De même $\overline{z}\times\overline{z}\times\overline{z}\times\overline{z} = \left(\overline{z}\times\overline{z}\right)\times\left(\overline{z}\times\overline{z}\right) = \overline{z^2}\times\overline{z^2}$ (d'après la R. O. C. 2. et toujours d'après la même formule) $= \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$, car $-4 \in \mathbb{R}$.
   Donc $\overline{z}$ est aussi solution de (E).
2. **a.** $z_0 = 1 + \text{i}$, donc $|z_0|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |z_0| = \sqrt{2}$.
   On peut en factorisant écrire :
   $z_0 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

   b. On a $z_0^4 = \left(\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4\left(\text{e}^{\text{i}\pi}\right) = 4\times(-1) = -4$.
   z_0 est bien une solution de l'équation (E).
3. D'après la question B. 1. $-z_0 = -1 - \text{i}$ et $\overline{z_0} = 1 - \text{i}$ sont aussi solutions ; mais puisque $\overline{z_0}$ est solution son opposé $-\overline{z_0} = -1 - \text{i}$ l'est aussi.
   Conclusion : $1 + \text{i}$, $1 - \text{i}$, $-1 - \text{i}$ et $-1 + \text{i}$ sont solutions de (E).

Partie C

1. D'après le cours l'écriture complexe de la rotation de centre C d'affixe $-1 - \text{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :
   $$z' - z_{\text{C}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\left(z - z_{\text{C}}\right) \iff z' = -1 - \text{i} + \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}(z + 1 + \text{i}),$$
   z étant l'affixe d'un point et z' celle de son image par r.
2. **a.** On a donc $z_{\text{E}} = -1 - \text{i} + \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}(-1 + \text{i} + 1 + \text{i}) =$
   $-1-\text{i}+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\times 2\text{i} = -1-\text{i}+\left(\frac{1}{2}-\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2\text{i} = -1-\text{i}+\text{i}+\sqrt{3} =$
   $z_{\text{E}} = -1 + \sqrt{3}$.

b. De même $z_F = 1 - \mathrm{i} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(1 + \mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}) =$
$1 - \mathrm{i} + \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \times 2 = 1 - \mathrm{i} + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 = 1 - \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = z_E =$
$-\mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

c. $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \dfrac{1 + \mathrm{i} + 1 - \sqrt{3}}{1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{\left[2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right]\left[1 - \mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]}{\left[1 + \mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]\left[1 - \mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]} = \dfrac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2} =$
$\dfrac{4}{1 + 4 + 3 + 2\sqrt{3}} = \dfrac{4}{8 + 2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{4 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}_+$.

d. $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ réel positif entraîne que $\arg\left(\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = \left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}\right) = 0 \quad [2\pi]$ ce qui signifie que les points A, E et F sont alignés.

Exercice 2 — 3 points

Commun à tous les candidats.

Partie A - Un seul robot

1. Soient $p(\mathrm{S})$, $p(\mathrm{I})$ et $p(\mathrm{X})$ les probabilités respectives de passer par les points S, I et X.
   On a $p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{X})$ et $p_{\mathrm{S}} = 2p(\mathrm{I})$.
   Donc $p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{X}) = 2p(\mathrm{I})$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(\mathrm{S}) + p(\mathrm{X}) + p(\mathrm{I}) = 1 \iff 2p(\mathrm{I}) + 2p(\mathrm{I}) + p(\mathrm{I}) = 1 \iff 5p(\mathrm{I}) = 1 \iff p(\mathrm{I}) = \dfrac{1}{5} = 0,2$.
   On en déduit que $p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{X}) = \dfrac{2}{5}$.
2. On a de façon évidente :
   $p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{S}) \times p_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}) \times p_{\mathrm{I}}(\mathrm{X}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{125}$.
3. La probabilité de F est la somme des probabilités de parcourir les « chemins » : SIX, SXI, ISX, IXS, XIS et XSI.
   Comme on l'a vu à la question précédente la probabilité de parcourir l'un de ces chemins est égale à $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{125}$, donc finalement :
   $p(\mathrm{F}) = 6 \times \dfrac{4}{125} = \dfrac{24}{125} = \dfrac{192}{1\,000} = 0,192$.

Partie B - Plusieurs robots

La probabilité qu'un robot ne passe pas par les sommets S, I et X dans cet ordre est d'après la question précédente : $1 - \dfrac{4}{125} = \dfrac{121}{125}$, donc la probabilité qu'aucun des n robots ne passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est $\left(\dfrac{121}{125}\right)^n$ (loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{121}{125}$.
La probabilité qu'au moins un robot passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est donc $1 - \left(\dfrac{121}{125}\right)^n$.
Il faut donc résoudre :

$1-\left(\dfrac{121}{125}\right)^n \geqslant 0{,}99 \iff \left(\dfrac{121}{125}\right)^n \leqslant 0{,}01 \iff \left(\dfrac{121}{125}\right)^n \leqslant 10^{-2}$, soit en prenant les logarithmes de ces nombres positifs, $n\ln\left(\dfrac{121}{125}\right) \leqslant -2\ln 10 \iff n \geqslant \dfrac{-2\ln 10}{\ln\left(\dfrac{121}{125}\right)} \approx 141{,}5$.

Il faut donc au minimum 142 robots.

Exercice 3 — 5 points

Enseignement obligatoire

1. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(2~;~1~;~-1)$.
Une équation d'un plan normal à $\overrightarrow{\text{AB}}$ est donc de la forme $2x+1y-1z+d=0$.
$\text{B}(3~;~2~;~0) \in (\text{P}) \iff 2\times 3+2-0+d=0 \iff d=-8$.
$M(x~;~y~;~z) \in (\text{P}) \iff 2x+y-z-8=0$.

2. D'après la question précédente : $\text{AB}^2 = 4+1+1=6 \Rightarrow \text{AB}=\sqrt{6}$.
$M(x~;~y~;~z) \in (\text{S}) \iff \text{A}M^2=\text{AB}^2 \iff (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6 \iff x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-3=0$.
$M(x~;~y~;~z) \in (\text{S}) \iff x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-3=0$.
(On peut calculer que les coordonnées de B vérifient cette équation.)

3. a. On a $d(\text{A},~(\text{Q})) = \dfrac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.
Comme la distance de A au plan (Q) est égale au rayon de la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{6}$, on en déduit que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b. On calcule $d(\text{A},~(\text{P})) = \dfrac{|2+1-1-8|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.
La réponse est donc : oui.

4. a. (P) a pour vecteur normal $\overrightarrow{\text{AB}}\,(2~;~1~;~-1)$ et (Q) a pour vecteur normal $\overrightarrow{p}\,(1~;~-1~;~2)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles : ils sont donc sécants
Les vecteurs normaux respectivement à (P) et à (Q) ne sont pas orthogonaux

b. Si $M(x~;~y~;~z) \in (\text{D}) = (\text{P})\cap(\text{Q})$, $(x~;~y~;~z)$ vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z-8 &=& 0\\ x-y+2z+4 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ 2x+y-z-8 &=& 0\\ x-y+2z+4 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y-z &=& -2t+8\\ -y+2z &=& -t-4\end{array}\right. \Rightarrow$$

(par somme)$z=-3t+4$ puis en remplaçant dans la première équation $y=z-2t+8=-3t+4-2t+8=-5t+12$.

Donc $M(x~;~y~;~z) \in (\text{D}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 5t+12\\ z &=& -3t+4\end{array}\right.$.

c. $\text{A}(1~;~1~;~1) \in (\text{D}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& t\\ 1 &=& 5t+12\\ 1 &=& -3t+4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& t\\ -\dfrac{11}{5} &=& t\\ 1 &=& t\end{array}\right.$

Conclusion : $\text{A} \notin (\text{D})$.

d. *Méthode 1*

- On a $\overrightarrow{\text{AB}}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\,(-1\,;\,1\,;\,2)$, donc $\text{AB}^2 = 2^2+1^2+1^2 = 6$ et $\text{AC}^2 = 1^2+1^2+2^2 = 6$.
  $\text{AB}^2 = \text{AC}^2 \Rightarrow \text{AB} = \text{AC}$: A est donc équidistant de B et de C.
- Soit M un point de (D), donc $M(t\,;\,12-5t\,;\,4-3t)$ et par conséquent $\overrightarrow{\text{B}M}\,(t-3\,;\,10-5t\,;\,4-3t)$ et $\overrightarrow{\text{C}M}\,(t\,;\,10-5t\,;\,5-3t)$.
  D'où $\text{B}M^2 = (t-3)^2+(10-5t)^2+(4-3t)^2 = t^2+9-6t+100+25t^2-100t+16+9t^2-24t = 35t^2-130t+125$.
  De même $\text{C}M^2 = t^2+(10-5t)^2+(5-3t)^2 = t^2+100+25t^2-100t+25+9t^2-30t = 35t^2-130t+125$.
  On a $\text{B}M^2 = \text{C}M^2 \Rightarrow \text{B}M = \text{C}M$, donc tout point de (D) est équidistant de B et de C.
  Conclusion : tout point de (Q) défini par A et la droite (D) est équidistant de B et de C (plan médiateur de [BC]).

Méthode 2

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AI}}\begin{vmatrix} -1 \\ 11 \\ 3 \end{vmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (R). Donc tout point du plan (R) a pour coordonnées :

$$M\left\{\begin{array}{l} x = 1-k+l \\ y = 1+11k-5l \\ z = 1+3k-3l \end{array}\right. \quad \text{avec } k\in\mathbb{R} \text{ et } l\in\mathbb{R}$$

Calculons, pour tout k et tout l, $\text{B}M^2-\text{C}M^2$:

$\text{B}M^2-\text{C}M^2 = (1-k+l-3)^2+(1+11k-5l-2)^2+(1+3k-3l)^2-(1-k+l)^2$
$-(1+11k-5l-2)^2-(1+3k-3l+1)^2$
$= (-2-k+l)^2+(1+3k-3l)^2-(1-k+l)^2-(2+3k-3l)^2$
$= (-2-k+l-1+k-l)(-2-k+l+1-k+l)+(1+3k-3l-2-3k+3l)$
$(1+3k-3l+2+3k-3l))$
$= (-3)(-1-2k+2l)+(-1)(3+6k-6l) = 3+6k-6l-3-6k+6l = 0$.

Ainsi, tout point M du plan (R) est équidistant de B et C.

Méthode 3 Avec le plan médiateur de [BC] :

On a $\overrightarrow{\text{BC}}\,(-3\,;\,0\,;\,-1)$ et le milieu I de [BC] a pour coordonnées $\text{I}\left(\frac{3}{2}\,;\,2\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.
Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan médiateur de [BC] si, et seulement si $\overrightarrow{\text{I}M}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 0 \iff -3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0\times(y-2)-1\left(z+\frac{1}{2}\right) = 0$
$\iff -3x-z+4 = 0$.

Or $-3\times1-1+4 = 0$ est vraie ce qui signifie que A(1 ; 1 ;1) appartient au plan médiateur ;

De même $-3t-(4-3t)+4 = 0$ est vraie ce qui signifie que tout point M de (D) appartient au plan médiateur de [BC].

Le point A et tout point de (D) sont donc équidistants de B et de C, donc tout point du plan défini par A et la droite (D) est équidistant de B et de C.

Exercice 3 — 5 points

Enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. Le couple (1 ; 1) est une solution évidente de (E)
2. On a donc : $\begin{cases} 7x-6y & = & 1 \\ 7\times 1-6\times 1=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ (par différence)$7(x-1)-6(y-1)=0 \quad [1] \iff 7(x-1)=6(y-1)$.

   Comme 7 divise $6(y-1)$ et est premier avec 6, 7 divise $y-1$: il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-1=7k \iff y=7k+1$ et en reportant dans [1] $7(x-1)=6\times 7k \iff x-1=6k \iff x=6k+1$.

   On vérifie aisément que tout couple $(6k+1~;~7k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$ vérifie l'équation (E).

   Les couples solutions sont les couples d'entiers $(6k+1~;~7k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,~m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n-3\times 2^m=1$ (F).

1. – Si $m=1$, (F) s'écrit $7^n-6=1 \iff 7^n=7$, d'ou $n=1$. Le couple (1 ; 1) est solution.
   – Si $m=2$, (F) s'écrit $7^n-12=1 \iff 7^n=13$ or 7 ne divise pas 13 : pas de solution ;
   – Si $m=3$, (F) s'écrit $7^n-24=1 \iff 7^n=25$ or 7 ne divise pas 25 : pas de solution ;
   – Si $m=4$, (F) s'écrit $7^n-48=1 \iff 7^n=49$ d'où $n=2$. Le couple (2 ; 4) est solution.
2. **a.** Comme $m\geqslant 5$, il existe p tel que $m=5+p$.
   $(n~;~m)$ vérifie (F) donc $7^n-3\times 2^m=1 \iff 7^n=1+3\times 2^{5+p}=1+3\times 2^5\times 2^p=1+3\times 32\times 2^p$.
   Comme $3\times 32\times 2^p\equiv 0 \quad [32]$, il en résulte que $7^n\equiv 1 \quad [32]$.

   b. On a $7\equiv 7 \quad [32]$;
   $7^2\equiv 17 \quad [32]$;
   $7^3\equiv 23 \quad [32]$;
   $7^4\equiv 1 \quad [32]$.
   À partir de là on retrouve de manière cyclique 7, 17, 23, 1 comme restes dans la division par 32.
   Les puissances de 7 dont le reste dans la division par 32 est égal à 1 sont donc celles dont l'exposant n est un multiple de 4.

   c. D'après les deux questions précédentes si un couple $(n~;~m)$ est solution de (F), alors $7^n\equiv 1 \quad [32]$ et n est un multiple de 4.
   Il existe donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=4k$, d'où en reportant $7^{4k}\equiv 1 \quad [32] \iff \left(7^4\right)^k\equiv 1 \quad [32] \iff 2\,401^k\equiv 1 \quad [32]$.
   Or $2\,401=5\times 480+1$, c'est-à-dire que $2\,401\equiv 1 \quad [5] \Rightarrow (2\,401)^k\equiv 1^k \quad [5] \iff 7^n\equiv 1 \quad [5]$ en revenant à l'écriture initiale de la puissance.

   d. Soit $(n~;~m)$ un couple solution de (F) ; donc
   $\begin{cases} 7^n-3\times 2^n & = & 1 \\ 7^n & \equiv 1 & [5] \end{cases} \Rightarrow -3\times 2^n\equiv 0 \quad [5]$.
   Ceci n'est pas possible puisque 5 ne divise ni 2, ni 3.
   Conclusion : il n'existe pas de couple solution avec un second terme supérieur à 4
3. D'après les questions 1. et 2. les seuls couples solutions de (F) sont (1 ; 1) et (2 ; 4).

Exercice 4 — 7 points

Commun à tous les candidats.

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. **a.**
   - La fonction $x \mapsto \ln(2x)$ est la composée des fonctions $x \mapsto 2x$ et $X \mapsto \ln(X)$ qui sont dérivables respectivement sur $[1\,;\,+\infty[$ et $\ln 2\,;\,+\infty[$.
     La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \dfrac{2}{2x} - 1\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.
     Comme $x > 0$, cette dérivée est du signe du numérateur $1 - x$.
     Donc $g'(x) = \iff x = 1$,
     $g'(x) < 0 \iff 1 < x$.
     Conclusion : la fonction g est décroissante sur $]1\ ;\,+\infty[$.
   - D'autre part $g(1) = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2$.
     En écrivant $g(x) = 2x\left(\dfrac{\ln(2x)}{2x} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\right)$.
     On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x)}{2x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$, donc par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x)}{2x} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ puis par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   - La fonction g est donc dérivable donc continue sur $[1\,;\,+\infty[$ et décroissante de $\ln 2$ à moins l'infini : il existe donc un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

   b. D'après la question précédente $g(\alpha) = 0 \iff \ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0 \iff \alpha = \ln(2\alpha) + 1$.

2. **a.** En allant « verticalement » vers la courbe (Γ) et « horizontalement » vers la droite d'équation $y = x$, on obtient quatre points de cette droite dont les abscisses sont $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$.
   Voir la figure.

   b. Par récurrence :
   - Initialisation : comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln(2) + 1 \approx 1,69 < 3$, on a bien :
     $$1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3.$$
   - Hérédité :
     Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ (1).
     Donc $u_{n+2} = \ln(2u_{n+1}) + 1$.
     Or (1) implique par produit par 2 :
     $2 \leqslant 2u_n \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 6$, puis
     $\ln 2 \leqslant \ln(2u_n) \leqslant \ln(2u_{n+1}) \leqslant \ln 6$ et enfin
     $1 + \ln 2 \leqslant \ln(2u_n) + 1 \leqslant \ln(2u_{n+1}) + 1 \leqslant \ln 6 + 1$ soit
     $1 + \ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \ln 6 + 1$.
     Comme $1 + \ln 6 \approx 2,791 < 3$, on en déduit finalement que
     $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$.

   On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

   c. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 3$.
   Comme la fonction g est continue, la fonction définie par $g(x) + x$ l'est aussi et à la limite on a donc :
   $\ell = \ln(\ell) + 1$. Or on a vu à la question 1. b. que α était la solution de cette équation.
   Conclusion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Partie B

1. **a.** La fonction f produit de fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$ est dérivable et par conséquent continue sur cet intervalle.

On sait alors que $F(x)$ est une primitive de f sur $[1~;~+\infty[$. On a donc $F'(x) = f(x)$.

Or sur $[1~;~+\infty[$, $x - 1 \geqslant 0$ et $\text{e}^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x, donc par produit $f(x) \geqslant 0$.

La dérivée de F étant positive, la fonction F est croissante sur $[1~;~+\infty[$.

b. On pose : $\left\{\begin{array}{l c l} u(t) & = & t-1\\ v'(t) & = & \text{e}^{1-t}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l c l} u'(t) & = & 1\\ v(t) & = & -\text{e}^{1-t}\end{array}\right.$

Toutes les fonctions étant continues car dérivable sur $[1~;~+\infty[$, on a par intégration par parties :

$F(x) = \left[-(t-1)\text{e}^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -\text{e}^{1-t}\,\text{d}t = \left[-(t-1)\text{e}^{1-t}\right]_1^x - \left[\text{e}^{1-t}\right]_1^x = \left[-t\text{e}^{1-t}\right]_1^x$
$= -x\text{e}^{1-x} - \left(1\text{e}^0\right) = 1 - x\text{e}^{1-x}$.

c. On a $F(x) = \dfrac{1}{2} \iff 1 - x\text{e}^{1-x} = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} = x\text{e}^{1-x} \iff$

(les deux membres étant supérieur à zéro et par croissance de la fonction ln) $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(x\text{e}^{1-x}\right) \iff -\ln 2 = \ln x + (1-x) \iff$

$\ln 2 + \ln x + 1 - x = 0 \iff \ln(2x) + 1 = x$.

2. On a vu que sur $[1~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire de la partie $\mathcal{D}_a$ est égale à l'intégrale $F(a)$.

Résoudre $F(a) = \dfrac{1}{2}$ a été fait à la question précédente et sa solution est le nombre vérifiant $\ln(2x) + 1 = x$; or on a vu à la question 1. b. que ce nombre est le nombre α

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4