∽ Baccalauréat S (obligatoire) Antilles-Guyane ∽ septembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

Soit $x > 0$.

Considérons la fonction $x \longmapsto [\exp(\ln x)] = x$.

En dérivant ces deux fonctions, en utilisant en premier la formule de dérivation d'une fonction composée : $\ln'(x) \times \exp'(\ln x) = 1$, soit puisque $\exp' = \exp$

$\ln'(x) \times \exp(\ln x) = 1$, ou encore $\ln'(x) \times x = 1 \iff \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, car $x \neq 0$.

PARTIE B - Étude de fonction

I - Étude d'une fonction auxiliaire

1. g somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle $g'(x) = 2x + 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$.

   Comme $x > 0$ le signe de la dérivée est donc celui du trinôme $2x^2-1 = \left(x\sqrt{2}+1\right)\left(x\sqrt{2}-1\right)$ ou encore de celui de $x\sqrt{2}-1$ puisque $x\sqrt{2}+1 > 1 > 0$.

   Ce trinôme s'annule donc en $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Sur $\left]0\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $g'(x) < 0$: la fonction est décroissante ;

   Sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$, $g'(x) > 0$: la fonction est croissante.

2. On a $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 - \dfrac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2 > 0$, car somme de deux termes positifs.

   Le minimum de g étant supérieur à zéro, on a donc $g(x) > 0$, sur $]0\,;\,+\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathcal{C}$

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x>0} f(x) = -\infty$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Soit la fonction d définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = \dfrac{\ln x}{x}$.

   On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ce qui montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$, c'est-à-dire que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. On a $\left[\dfrac{\ln x}{x}\right]' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 + \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2+1-\ln x}{x^2}$.

4. On a donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$: d'après la question précédente les deux termes de ce quotient sont supérieurs à zéro, donc le quotient l'est aussi : la fonction f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. La droite $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur 1. Il faut donc chercher l'abscisse x_A telle que $f'(x_A) = 1$.

Donc on cherche $f'(x) = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 1 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = \mathrm{e}$. Or $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} + \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \mathrm{e} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Finalement : $\mathrm{A}\left(\mathrm{e}~;~\mathrm{e} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

6. Voir plus bas.

III - Calcul d'une aire

1. Intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = \ln x \\ u(x) = \ln x & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Toutes ces fonctions sont dérivables donc continues sur $[1~;~\mathrm{e}]$, donc

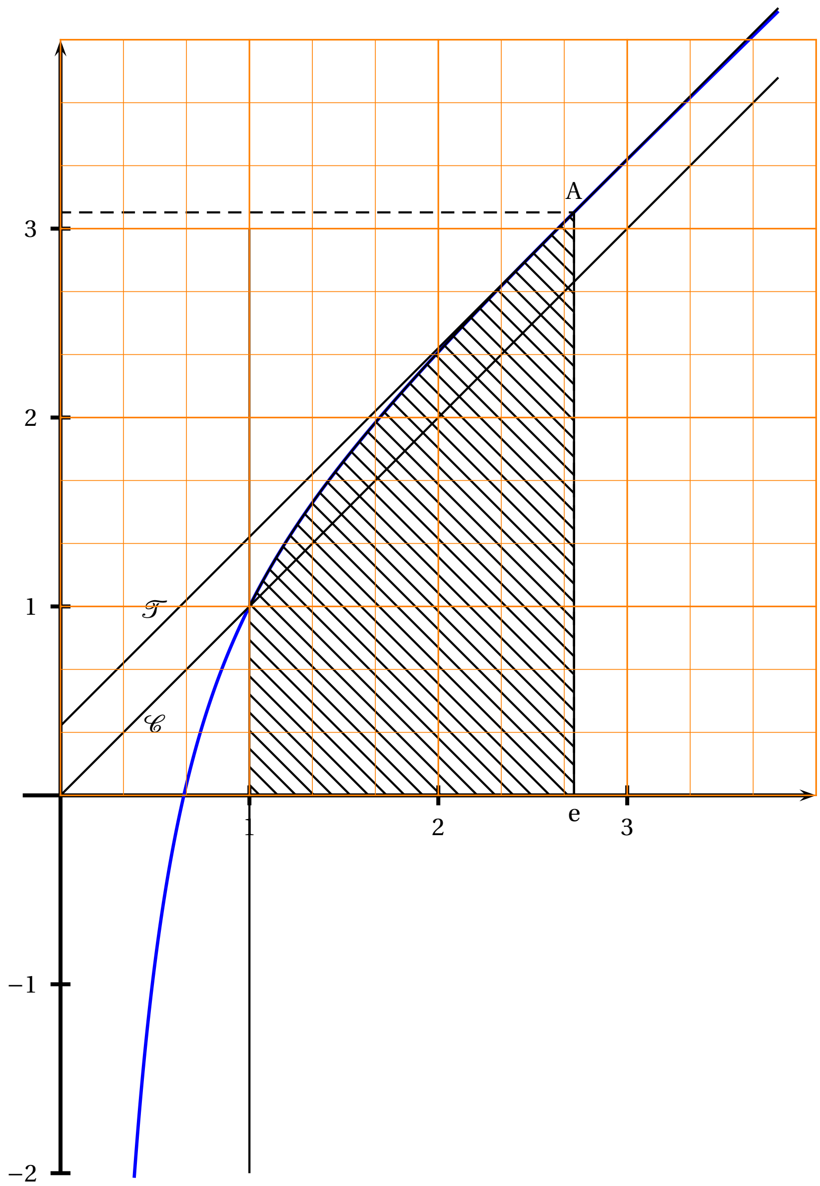
$I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = [(\ln x)(\ln x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \iff I \iff 2I = (\ln(\mathrm{e})^2 - (\ln(1))^2 = 1 \iff$ $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$.

2. La fonction f est croissante sur $]0~;~+\infty[$ et $f(1) = 1$, donc sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$, $f(x) \geqslant 1 > 0$.

L'aire de la surface délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = \mathrm{e}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ est donc égale en unités d'aire à l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} + I = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}(u.a.)$.

L'unité d'aire étant égale à $3 \times 3 = 9$ cm^2, l'aire de la surface est donc égale à $\dfrac{9\mathrm{e}^2}{2} \approx 33,25$ cm^2, ce que l'on vérifie approximativement sur la figure.



EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. VRAIE. Si A est le point d'affixe 2 et B celui d'affixe 2i, $|z-2| = |z-2\text{i}| \iff AM = BM \iff M$ est équidistant de A et de B, donc M appartient à la médiatrice de [AB] : cette médiatrice a bien pour équation $y = x$.
2. VRAIE. $\dfrac{b-a}{c-a} = -3 \Rightarrow \arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \arg(-3)$ soit $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AB}}\right) = \pi$. Cette dernière égalité montre que les points A, B et C sont alignés.
3. VRAIE. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \left(\text{B}, \vec{u}\right) \iff \overrightarrow{\text{B}M} = \alpha\vec{u}\ (\alpha \in \mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-2 & = & 1\alpha \\ y-3 & = & 2\alpha \\ z-4 & = & 3\alpha \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \alpha+2 \\ y & = & 2\alpha+3 \\ z & = & 3\alpha+4 \end{array}\right.$
Or en posant $\alpha = t-1$, on a donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \left(\text{B},\ \overrightarrow{u}\right) \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & t-1+2 \\ y & = & 2(t-1)+3 \\ z & = & 3(t-1)+4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+1 \\ y & = & 2t+1 \\ z & = & 3t+1 \end{array}\right.$$

4. FAUSSE. L'affirmation signifie que la distance du centre A de la sphère au plan $\mathscr{P}$ est égale à 10. Or :

$d(\text{A}, \mathscr{P}) = \dfrac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \neq 10.$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. D'après la définition $u_2 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

• Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $-\dfrac{1}{2}$; or $u_1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \neq u_2$.

• Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $\dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{3}{2}$; or $u_1 + \left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{4}{2} = 2 \neq u_2$.

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. **a.** $v_0 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times (-1) = 1$.

b. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n\right) = \dfrac{1}{2}v_n$.

c. $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

d. On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$.

3. **a.** $w_0 = \dfrac{u_0}{v_0} = \dfrac{-1}{1} = -1$.

b. On a $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \dfrac{u_n}{v_n}$.

c. On a par définition $\dfrac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit :

$w_{n+1} = 2 + w_n$.

d. L'égalité précédente montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 2.

On a donc $w_n = w_0 + n \times 2 = -1 + 2n$.

4. On a trouvé que $w_n = 2n - 1 = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.

Donc $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$, car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5. Démonstration par récurrence :

• Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \dfrac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \dfrac{3}{1} = 2 - 3 = -1$. La formule est vraie au rang 0.

• Hérédité : supposons qu'il existe un naturel k tel que :

$S_n = \sum_{i=0}^{k=n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = 2 - \dfrac{2k+3}{2^k}$.

Donc $S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = 2 - \dfrac{2k+3}{2^k} + \dfrac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} = 2 + \dfrac{-4k-6+2k+1}{2^{k+1}} = 2 + \dfrac{-2k-5}{2^{k+1}} = 2 - \dfrac{2k+5}{2^{k+1}} = 2 - \dfrac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}$.

La formule est vraie au rang $k+1$.

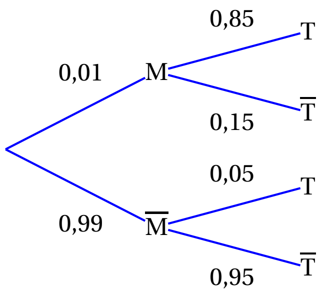
On a donc démontré par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** On suit la première branche : la probabilité est égale à $p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{T}) = 0,01 \times 0,85 = 0,008\,5$.

b. La probabilité qu'il soit non porteur de la maladie et que son test soit positif (troisième branche) est égale à $0,99 \times 0,05 = 0,049\,5$.

On a donc $p(\text{T}) = p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{T}) + p\left(\overline{\text{M}}\right) \times p_{\text{M}}(\text{T}) = 0,008\,5 + 0,049\,5 = 0,058$.

3. Il faut calculer $p_{\text{T}}(\text{M}) = \dfrac{p(\text{M} \cap \text{T})}{p(\text{T})} = \dfrac{0,008\,5}{0,058} \approx 0,146\,6$.

4. **a.** On a ici une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,008\,5$.

La probabilité que k animaux soient malades est égale à :

$$\binom{5}{k} \times 0,008\,5^k \times (1 - 0,008\,5)^{5-k}.$$

On obtient le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

$\text{X} = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p\,(\text{X} = x_i)$	0,741 7	0,228 4	0,028 1	0,001 7	0,000 1	0

b. L'évènement contraire est : tous les animaux ont un test négatif qui d'après le tableau précédent a une probabilité d'environ 0,741 7.

La probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est donc : $1 - 0,741\,7 = 0,2583$.

5.

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. On a d'après les données du tableau :

$\text{E} = 0 \times 0,940\,5 + 100 \times 0,058\,0 + 1\,000 \times 0,001\,5 = 5,80 + 1,50 = 7,30$ €.

Ceci représente le coût moyen par animal

b. Pour 200 bêtes, le coût sera en moyenne de :

$$200 \times 7,30 = 1\,460 \text{ €}.$$