

# Métropole 21 juin 2011

Mathématiques

## Exercice 1

Commun à tous les candidats

4 points

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à  $10^{-4}$ .

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

### Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note  $V$  l'événement « la personne est contaminée par le virus » et  $T$  l'événement « le test est positif ».

$\bar{V}$  et  $\bar{T}$  désignent respectivement les événements contraires de  $V$  et  $T$ .

- 1) a) Préciser les valeurs des probabilités  $P(V)$ ,  $P_V(T)$ ,  $P_{\bar{V}}(\bar{T})$ .  
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.  
b) En déduire la probabilité de l'événement  $V \cap T$ .
- 2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
- 3) a) Justifier par un calcul la phrase  
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».  
b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

### Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

- 1) Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- 2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

## Exercice 2

Commun à tous les candidats

4 points

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $A, B, C, D$  les points d'affixes respectives  $z_A = 1, z_B = i, z_C = -1, z_D = -i$ .

1) L'image  $E$  du point  $D$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  a pour affixe :

•❖  $z_E = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i)$

•❖  $z_E = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i)$

•❖  $z_E = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 - i)$

•❖  $z_E = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i)$

2) L'ensemble des points d'affixe  $z$  telle que  $|z + i| = |z - 1|$  est :

- ❖ la médiatrice du segment  $[BC]$ ,
- ❖ le milieu du segment  $[BC]$ ,
- ❖ le cercle de centre  $O$  et de rayon 1,
- ❖ la médiatrice du segment  $[AD]$ .

3) L'ensemble des points d'affixe  $z$  telle que  $\frac{z+i}{z+1}$  soit un imaginaire pur est :

- ❖ la droite  $(CD)$  privée du point  $C$ ,
- ❖ le cercle de diamètre  $[CD]$  privé du point  $C$ ,
- ❖ le cercle de diamètre  $[BD]$  privé du point  $C$ ,
- ❖ la médiatrice du segment  $[AB]$ .

4) L'ensemble des points d'affixe  $z$  telle que  $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$  est :

- ❖ le demi-cercle de diamètre  $[BD]$  passant par  $A$ ,
- ❖ la droite  $(BD)$ ,
- ❖ la demi-droite  $]BD)$  d'origine  $B$  passant par  $D$  privée de  $B$ ,
- ❖ le cercle de diamètre  $[BD]$  privé de  $B$  et  $D$ .

### Exercice 3

Commun à tous les candidats

7 points

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

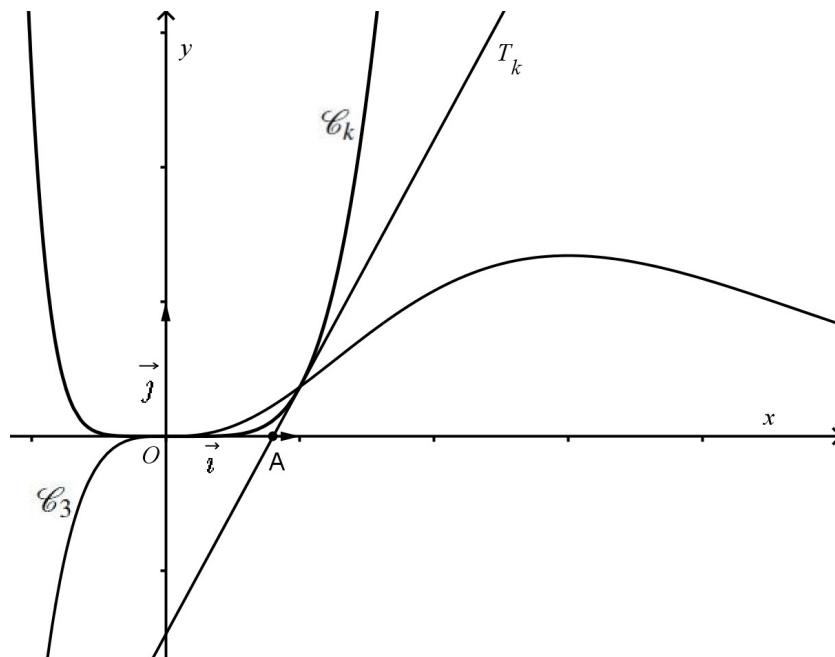
$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

On note  $\mathcal{C}_n$ , sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

#### Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe  $\mathcal{C}_k$  où  $k$  est un entier naturel non nul, sa tangente  $T_k$  au point d'abscisse 1 et la courbe  $\mathcal{C}_3$ .

La droite  $T_k$  coupe l'axe des abscisses au point  $A$  de coordonnées  $(\frac{4}{5}, 0)$ .



- 1) a) Déterminer les limites de la fonction  $f_1$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
 b) Étudier les variations de la fonction  $f_1$  et dresser le tableau de variations de  $f_1$ .  
 c) A l'aide du graphique, justifier que  $k$  est un entier supérieur ou égal à 2.
- 2) a) Démontrer que pour  $n \geq 1$ , toutes les courbes  $\mathcal{C}_n$  passent par le point  $O$  et un autre point dont on donnera les coordonnées.  
 b) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, et pour tout réel  $x$ ,

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$$

- 3) Sur le graphique, la fonction  $f_3$  semble admettre un maximum atteint pour  $x = 3$ . Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

- 4) a) Démontrer que la droite  $T_k$  coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées  $(\frac{k-2}{k-1}, 0)$   
 b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier  $k$ .

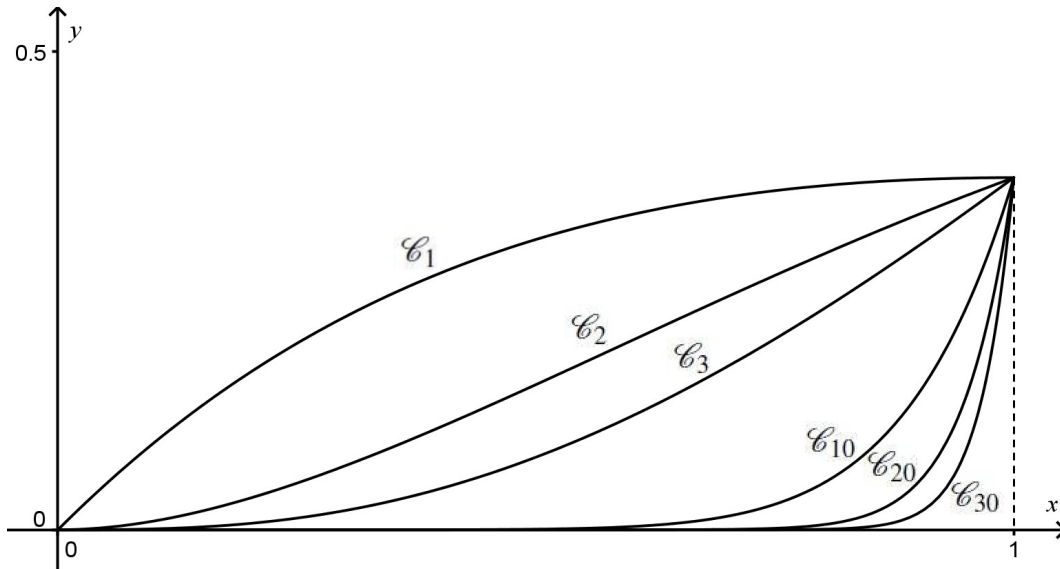
**Partie B**

On désigne par  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

- 1) Calculer  $I_1$ .
- 2) *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$  comprises dans la bande définie par  $0 \leq x \leq 1$ .



- a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  en décrivant sa démarche.
- b) Démontrer cette conjecture.
- c) En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.
- d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

## Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  et par  $M_0$  le point de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ . On appelle  $H$  le projeté orthogonal du point  $M_0$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

On suppose connue la propriété suivante.

**Propriété :** Le vecteur  $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .

Le but de cette partie est de démontrer que la distance  $d(M_0, \mathcal{P})$  du point  $M_0$  au plan  $\mathcal{P}$ , c'est à dire la distance  $M_0H$ , est telle que :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- 1) Justifier que :  $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}| = M_0H \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .
- 2) Démontrer que  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$ .
- 3) Conclure.

### Partie B

On désigne par  $A, B, C, F$  les points de coordonnées respectives  $(4, 1, 5), (-3, 2, 0), (1, 3, 6), (-7, 0, 4)$ .

- 1) a) Démontrer que les points  $A, B, C$  définissent un plan  $\mathcal{P}$  et que ce plan a pour équation cartésienne  $x + 2y - z - 1 = 0$ .  
b) Déterminer la distance  $d$  du point  $F$  au plan  $\mathcal{P}$ .
- 2) Le but de cette question est de calculer la distance  $d$  par une autre méthode.  
On appelle  $\Delta$  la droite qui passe par le point  $F$  et qui est perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$ .  
a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .  
b) Déterminer les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $F$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .  
c) Retrouver le résultat de la question 1)b).
- 3) Soit  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $F$  et de rayon 6.  
a) Justifier que le point  $B$  appartient à la sphère  $\mathcal{S}$ .  
b) Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ , intersection de la sphère  $\mathcal{S}$  et du plan  $\mathcal{P}$ .

## Exercice 5

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

### Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs vérifiant  $au + bv = 1$ .

Théorème de GAUSS :

Soient  $a, b, c$  des entiers relatifs.

Si  $a$  divise le produit  $bc$  et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a$  divise  $c$ .

- 1) En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
- 2) Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels tels que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.  
Déduire du théorème de GAUSS que, si  $a$  est un entier relatif, tel que  $a \equiv 0 [p]$  et  $a \equiv 0 [q]$ , alors  $a \equiv 0 [pq]$ .

### PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}$  des entiers relatifs  $n$  vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 [17] \\ n \equiv 3 [5] \end{cases}$$

- 1) Recherche d'un élément de  $\mathcal{S}$ .  
On désigne par  $(u, v)$  un couple d'entiers relatifs tel que  $17u + 5v = 1$ .
  - a) Justifier l'existence d'un tel couple  $(u, v)$ .
  - b) On pose  $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ .  
Démontrer que  $n_0$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
  - c) Donner un exemple d'entier  $n_0$  appartenant à  $\mathcal{S}$ .
- 2) Caractérisation des éléments de  $\mathcal{S}$ 
  - a) Soit  $n$  un entier relatif appartenant à  $\mathcal{S}$ .  
Démontrer que  $n - n_0 \equiv 0 [85]$ .
  - b) En déduire qu'un entier relatif  $n$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $n$  peut s'écrire sous la forme  $n = 43 + 85k$  où  $k$  est un entier relatif.
- 3) Application  
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.  
Combien a-t-elle de jetons ?