

# Devoir sur les applications de la dérivée

À rendre pour le mardi 11 janvier 2011

## Exercice I :

### Trouver une fonction

On considère une fonction  $f$  dont on ne connaît que quelques propriétés.

- ⇨  $f$  est définie sur l'ensemble  $D_f = [-2; -1[ \cup ] -1; +\infty[$
- ⇨  $f$  est dérivable sur  $D_f$ .
- ⇨ sur  $D_f$  sa dérivée s'annule en  $-2$  et en  $0$ .
- ⇨ le signe de sa dérivée est donné par le tableau suivant :

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$	
$f'(x)$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$

- 1) a) Donner les variations de  $f$ .
- b) si  $-1 < a < b < 0$ , comparer  $f(a)$  et  $f(b)$ .
- c) si  $-1 < a < b < 2$ , peut-on comparer les nombres  $f(a)$  et  $f(b)$  ?
- d) Si  $a = 2$  et  $b = 0$ , peut-on comparer les nombres  $f(a)$  et  $f(b)$  ?
- 2) On sait de plus que  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x + p}$$

où  $m$ ,  $n$  et  $p$  sont des réels,  $p$  étant non nul

Trouver une fonction  $f$  satisfaisant aux propriétés précédentes

## Exercice II :

### Problème de l'éditeur

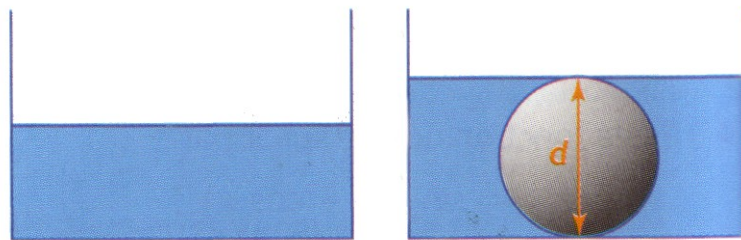
Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de  $300 \text{ cm}^2$ , les marges doivent mesurer  $1,5 \text{ cm}$  sur les bords horizontaux et de  $2 \text{ cm}$  sur les bords verticaux.

Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

## Exercice III :

### Problème d'immersion

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon  $40 \text{ cm}$  contenant de l'eau dont la hauteur est  $20 \text{ cm}$ . On y plonge une bille sphérique de diamètre  $d$  (en  $\text{cm}$ ) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre  $d$  de la bille.



1) Vérifier que  $d$  est solution du système

$$\begin{cases} 0 \leq d \leq 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$$

2)  $f$  est la fonction sur  $[0; 80]$  par :

$$f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$$

- Etudier les variations de  $f$
- Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique sur  $[0; 80]$ .
- Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $d$ .