Devoir sur les applications de la dérivée

mardi 11 janvier 2011 - correction

Exercice 1 :

Trouver une fonction

1) a) Donner les variation de f.

La fonction f est :

- ➪ décroissnte sur $[-2;-1[$
- ➪ décroissante sur $]-1;0]$
- ➪ croisaante sur $[0;+\infty[$

b) si $-1 < a < b < 0$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

La fonction est décroissante sur $]-1,0[$ donc $f(a) > f(b)$

c) si $-1 < a < b < 2$, peut-on comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$?

La fonction f n'est pas monotone sur $]-1;2[$ donc on ne peut comparer $f(a)$ et $f(b)$.

d) Si $a = 2$ et $b = 0$, peut-on comparer les nombres$f(a)$ et $f(b)$?

La fonction f est croissante sur $[0,2]$ donc $f(0) < f(2)$.

2) On sait de plus que f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x + p}$$

La fonction n'est pas définie en -1 donc on en déduit que $p = 1$.

Dérivons la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + n}{x + 1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + m)(x + 1) - (x^2 + mx + n}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + mx + m - x^2 - mx - n}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + m - n}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Comme on doit avoit $f'(0) = 0$, on en déduit que $m = n$

On peut remarquer alors que la dérivée s'annule une seconde fois en $x = -2$ et que les signes sont conformes au tableau de variation. On peut par exemple prendre $m = 2$, ce qui donne pour la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

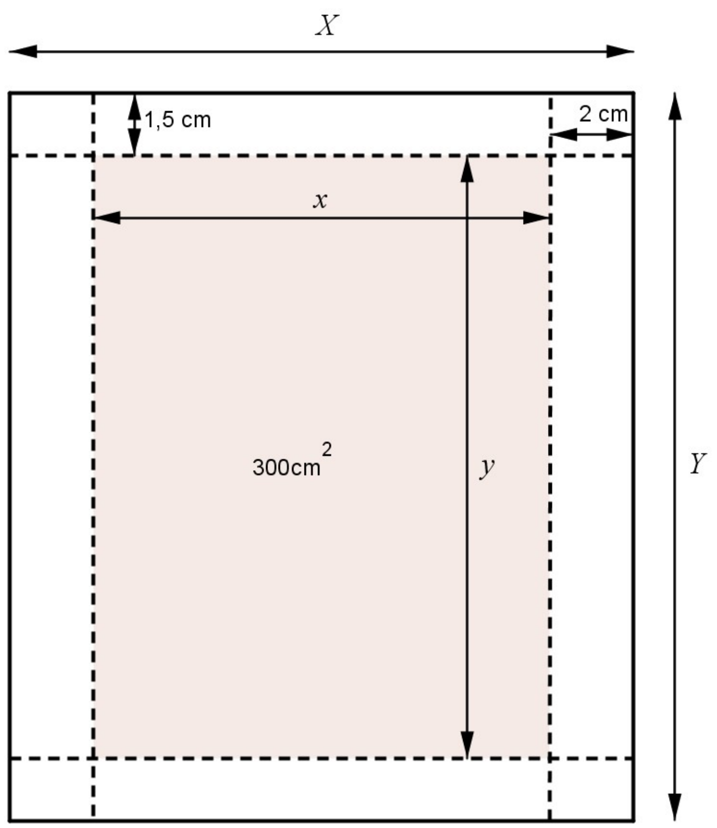
Exercice II :

Problème de l'éditeur

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm^2, les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et de 2 cm sur les bords verticaux.

Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

Faisons un petit schema :



Deux systèmes de variables sont possible $(x; y)$ et $(X; Y)$ mais le premier est plus efficace. On déterminera donc x et y puis l'on déduira X et Y.

La surface imprimée est 300 cm^2, donc : $xy = 300$ d'ou l'on déduit $y = \dfrac{300}{x}$

La consommation de papier est minimal si l'aire totale de la feuille est minimale, c'est à dire $(x + 4)(y + 3)$.

On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x + 4)\left(\frac{300}{x} + 3\right) = 300 + 3x + \frac{1200}{x} + 12 = 312 + 3x + \frac{1200}{x}$$

On dérive la fonction f :

$$f'(x) = 3 - \frac{1200}{x^2} = \frac{3(x - 20)(x + 20)}{x^2}$$

La fonction f' sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annule en $x = 20$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(20)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction admet un minimum en $x = 20$, on en déduit $y = \dfrac{300}{20} = 15$.

On revient à X et Y. On a alors $X = 20 + 4 = 24$ et $Y = 15 + 3 = 18$

La feuille de papier doit avoir comme dimension en cm 24×18. C'est un format italien.

Exercice III :

Problème d'immersion

1) On rappelle les formules des volumes du cylindre et de la sphère :

$$V_{\text{cylindre}} = \pi r^2 h \quad \text{et} \quad V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

d : la hauteur du récipient avec la bille dans le récipient. Elle doit être plus petite que le diamètre du récipient et au moins aussi grande que la hauteur d'eau sans la bille soit : $20 \leqslant d \leqslant 80$

On a :

$$V_{\text{total}} = V_{\text{eau}} + V_{\text{bille}}$$
$$\pi \times 40^2\, d = \pi \times 40^2 \times 20 + \frac{\pi\, d^3}{6}$$

On multiplie par 6 et on divise par π

$$6 \times 1600\, d = 6 \times 1600 \times 20 + d^3$$
$$d^3 - 9600\, d + 192000 = 0$$

2) f est la fonction sur $[0; 80]$ par :

$$f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$$

a) Etudier les variations de f

On dérive la fonction f :

$$f'(x) = 3x^2 - 9600 = 3(x^2 + 3200) = 3(x - 40\sqrt{2})(x + 40\sqrt{2})$$

f' s'annule en $x = 40\sqrt{2}$ sur l'intervalle $[0; 80]$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$40\sqrt{2}$		80
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(40\sqrt{2})$	$\nearrow$	$f(80)$

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $[0; 80]$.
On calcule les valeurs :

$$f(0) = 192000 \quad , \quad f(40\sqrt{2} \simeq -170039 \quad \text{et} \quad f(80) = -64000$$

D'après les variation de la fonction f, $f(x) < 0$ sur $[40\sqrt{2}; 80]$

Sur l'intervalle $[0; 40\sqrt{2}]$, la fonction f est dérivable, monotone ($f'(x) < 0$) et $f(0) \times f(40\sqrt{2}) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [0; 40\sqrt{2}]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[0; 80]$.

c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de d.

On obtient : $20,95 < \alpha < 20,96$