Contrôle de mathématiques

Jeudi 03 février 2011 correction

Exercice 1

Tableau de variation (2,5 points)

1) $D_f = \mathbb{R}^*$;

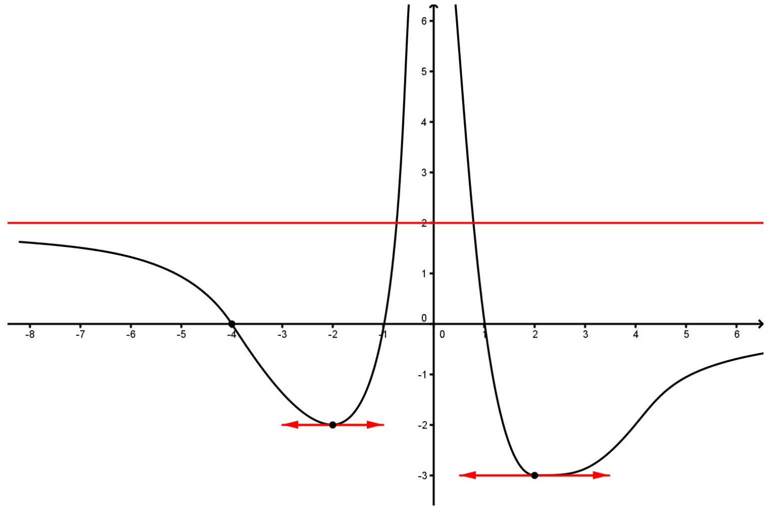
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ asymptote horizontale d'équation $y = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ asymptote verticale d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

3) cf plus haut

4) On obtient la courbe suivante :



Exercice 2

Asymptote oblique (2,5 points)

1) On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x-1} \\ &= \frac{ax^2 - a + bx - b + c}{x-1} \\ &= \frac{ax^2 + x(-a+b) - b + c}{x-1} \end{aligned}$$

On identifie à la première forme et l'on trouve : $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$.

On a donc : $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x-1}$

2) On calcule $f(x) - (x+2) = \dfrac{1}{x-1}$

or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

donc la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

3) La position de $\mathscr{C}_f$ et Δ est donnée par le signe de $\dfrac{1}{x-1}$.
donc si $x > 1$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ et si $x < 1$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ
.

Exercice 3

Limites (5 points)

1) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-x} = \lim_{x\to+\infty} -2 = -2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -2 = -2$

On en déduit donc une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.

c) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to1} 2x+5 = 7 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} 1-x = 0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$

d) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to1} 2x+5 = 7 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-x = 0^-\end{array}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$

On en déduit donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3} = -\infty$

3) a) Déterminer le signe de $x^2 - 4$ suivant les valeurs de x.

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, d'après le signe du trinôme, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-2} 3x-10 = -16 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x^2-4 = 0^+ \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x^2-4 = 0^-\end{array}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} h(x) = -\infty$ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} h(x) = +\infty$

c) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to2} 3x-10 = -4 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} x^2-4 = 0^- \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2-4 = 0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} h(x) = +\infty$ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x-2}} h(x) = -\infty$

Exercice 4

Etude de fonction (10 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3x+5}$.

1) Racines de $x^2 - 3x + 5$, on calcule $\Delta = 9 - 20 = -11$

Pas de racine, donc l'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

3) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-3x+5) - x^3(2x-3)}{(x^2-3x+5)^2} \\ &= \frac{x^2(3x^2-9x+15-2x^2+3x)}{(x^2-3x+5)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2-6x+15)}{(x^2-3x+5)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 6x + 15 = 0$ ($\Delta = 36 - 60 = -24$ donc pas de racine)

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geqslant 0$.

4) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) Calculons l'expression

$$\begin{aligned} x + 3 + \frac{4x-15}{x^2-3x+5} &= \frac{x^3 - 3x^2 + 5x^2 + 3x^2 - 9x + 15 + 4x - 15}{x^2-3x+5} \\ &= \frac{x^3}{x^2-3x+5} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

6) On calcule l'expression : $f(x) - (x+3) = \dfrac{4x-15}{x^2-3x+5}$

or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-15}{x^2-3x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-15}{x^2-3x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Donc la droite (Δ) est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

La position de $\mathscr{C}_f$ et de (Δ) est donnée par le signe de $\dfrac{4x-15}{x^2-3x+5}$

donc par le signe de $4x-15$ car le dénominateur est toujours positif $(\Delta < 0)$.

si $x > \dfrac{15}{4}$ $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ et si $x < \dfrac{15}{4}$ $\mathscr{C}_f$ en dessous de Δ.

7) Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe (Δ), il faut que :

$$\frac{4x-15}{x^2-3x+5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-15=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{15}{4}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite Δ au point d'abscisse $x = \dfrac{15}{4}$.

On trouve alors $y = \dfrac{15}{4} + 3 = \dfrac{27}{4}$ donc $\Omega = \left(\dfrac{15}{4}; \dfrac{27}{4}\right)$

8) D'après les variation de f, la fonction est dérivable et monotone sur $\mathbb{R}$.

Comme $f(0) = 0$ et $f(3) = \dfrac{27}{5}$, on a $5 \in [f(0); f(3)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe une unique solution $\alpha \in [0;3]$ tel que $f(\alpha) = 5$.

A l'aide d'une calculette, on trouve : $2,82 < \alpha < 2,83$

9) On obtient la courbe suivante :