Contrôle de mathématiques

Jeudi 17 mars 2011

Exercice 1

Suite arithmétique (4 points)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
On note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Les deux questions suivantes sont indépendantes

1) Calculer u_0 et r sachant que $S_{10} = 88$ et $S_{12} = 143$.
2) Calculer n sachant que $r = 3$, $u_0 = -10$ et $S_n = 200$.

Exercice 2

Suite géométrique (3 points)

La suite (v_n) est géométrique de raison q et de premier terme v_0.
On note $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Les trois questions suivantes sont indépendantes

1) Déterminer v_6 et S_6 sachant que $q = 3$ et $v_0 = 2$.
2) Déterminer v_0 et q sachant que $v_7 = 16\,000$ et $v_{10} = 1\,024$.
3) Déterminer la valeur exacte de S_5 puis déterminer la limite de S_n sachant que $v_0 = 2$ et $q = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 3

Suite arithmético-géométrique (5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

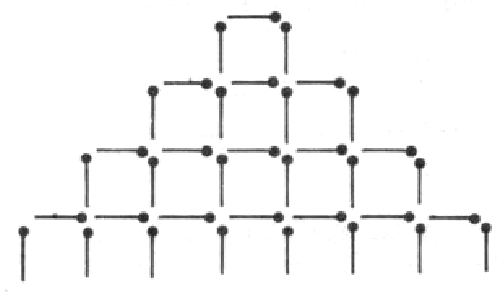
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 5}{3} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 sous la forme d'une fraction irréductible.

   On définit la suite (v_n) pour tout entier n par : $v_n = u_n - 5$.
2) Calculer v_0, v_1, v_2.
3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
4) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
5) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4
Histoire d'allumettes (3 points)

En posant des allumettes de même longueur sur une table, on réalise une figure plane donnée sur la figure ci-dessous.



Combien d'étages peut-on construire avec 10 440 allumettes ? On expliquera soigneusement la méthode utilisée.

Exercice 5
Une récurrence homographique (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

On a représenté en annexe la fonction $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ et la droite d'équation $y = x$.

1) Déterminer graphiquement les termes : u_1, u_2 et u_3. On construira les trois termes sur le graphique (à rendre) et on donnera la valeur la plus précise que peut donner le graphique.

   Conjecturer la limite de la suite.

   On pose la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_0.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4) Déterminer la limite de la suite (u_n).
5) Si on avait pris comme premier terme de la suite (u_n) : $u_0 = -3$, la suite aurait-elle eu la même limite ? Dans le cas contraire, quelle est la nature de cette suite (Vous justifierez la réponse).

Annexe