Contrôle de mathématiques

Correction Jeudi 17 mars 2011

Exercice 1

Suite arithmétique (4 points)

1) Calculer u_0 et r sachant que $S_{10} = 88$ et $S_{12} = 143$.

On traduit les deux information à l'aide des formules des suites arithmétiques :

$$\begin{cases} 11\left(\dfrac{u_0 + u_{10}}{2}\right) = 88 \\ 13\left(\dfrac{u_0 + u_{12}}{2}\right) = 143 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + u_{10} = 16 \\ u_0 + u_{12} = 22 \end{cases}$$

De plus, on a : $\begin{cases} u_{10} = u_0 + 10r \\ u_{12} = u_0 + 12r \end{cases}$

On obtient alors :

$$\begin{cases} 2u_0 + 10r = 16 \\ 2u_0 + 12r = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 5r = 8 \\ u_0 + 6r = 11 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient : $r = 3$ puis $u_0 = -7$

2) Calculer n sachant que $r = 3$, $u_0 = -10$ et $S_n = 200$.

On a :

$$u_n = u_0 + nr = -10 + 3n \quad \text{et} \quad (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) = 200$$

On obtient en multipliant la 2e égalité par 2 :

$$\begin{aligned} (n+1)(-10 - 10 + 3n) &= 400 \\ (n+1)(-20 + 3n) - 400 &= 0 \\ -20n + 3n^2 - 20 + 3n - 400 &= 0 \\ 3n^2 - 17n - 420 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule $\Delta = 289 + 5040 = 5329 = 73^2$

On obtient alors la racine positive :

$$n = \frac{17 + 73}{6} = 15$$

Exercice 2

Suite géométrique (3 points)

1) Déterminer v_6 et S_6 sachant que $q = 3$ et $v_0 = 2$.

On obtient à l'aide des formules du cours :

$$v_6 = v_0 \times q^6 = 2 \times 3^6 = 1458$$

$$S_6 = v_0 \times \frac{1 - q^7}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = 3^7 - 1 = 2186$$

2) Déterminer v_0 et q sachant que $v_7 = 16\,000$ et $v_{10} = 1\,024$.

On a :

$$v_{10} = v_7 \times q^3 \quad \text{donc} \quad q^3 = \frac{v_{10}}{v_7} = \frac{1\,024}{16\,000} = \frac{2^3}{5^3}$$

On en déduit alors : $q = \dfrac{2}{5} = 0,4$ puis $v_0 = \dfrac{v_7}{q^7} = \dfrac{16\,000}{0,4^7} = 9\,765\,625$

3) Déterminer la valeur exacte de S_5 puis déterminer la limite de S_n sachant que $v_0 = 2$ et $q = \dfrac{1}{3}$.

On a :

$$S_5 = v_0 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}} = 3\left(1 - \frac{1}{3^6}\right) = \frac{728}{243} \simeq 2{,}995\,884\,774$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 3\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

On sait que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$

Par somme et produit (opération sur les limites), on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 3$

Exercice 3

Suite arithmético-géométrique (5 points)

1) Calculer u_1, u_2, u_3 sous la forme d'une fraction irréductible.

$$u_1 = \frac{2u_1+5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$u_2 = \frac{2u_1+5}{3} = \frac{2\times\frac{7}{3}+5}{3} = \frac{29}{9}$$

$$u_3 = \frac{2u_2+5}{3} = \frac{2\times\frac{29}{9}+5}{3} = \frac{103}{27}$$

2) Calculer v_0, v_1, v_2.

$$v_0 = u_0 - 5 = 1 - 5 = -4$$

$$v_1 = u_1 - 5 = \frac{7}{3} - 5 = -\frac{8}{3}$$

$$v_2 = u_2 - 5 = \frac{29}{9} - 5 = -\frac{16}{9}$$

3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= \frac{2u_n + 5}{3} - 5 \\ &= \frac{2u_n + 5 - 15}{3} \\ &= \frac{2u_n - 10}{3} \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 5) \\ &= \frac{2}{3} v_n \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2}{3}$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -4$.

4) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

On a alors : $v_n = v_0 \times q^n = -4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Comme $v_n = u_n - 5$ alors $u_n = v_n + 5$

$$u_n = 5 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

5) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$

Par somme (opération sur les limites), on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$

Exercice 4

Histoire d'allumettes (3 points)

On passe de l'étage n à l'étage $n + 1$ en rajoutant 4 allumettes (2 de chaque côté). Si on appelle u_n le nombre d'allumettes à l'étage n, on a donc la relation :

$$u_{n+1} = u_n + 4$$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_1 = 3$

On en déduit alors que $u_n = 3 + 4(n - 1)$

On doit avoir :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= 10\,440 \\ n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) &= 10\,440 \\ n\left(\frac{3 + 3 + 4(n-1)}{2}\right) &= 10\,440 \\ n(3 + 2n - 2) &= 10\,440 \\ 2n^2 + n + 10\,440 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule $\Delta = 1 + 83\,520 = 83\,521 = 289^2$

La racine positive est :

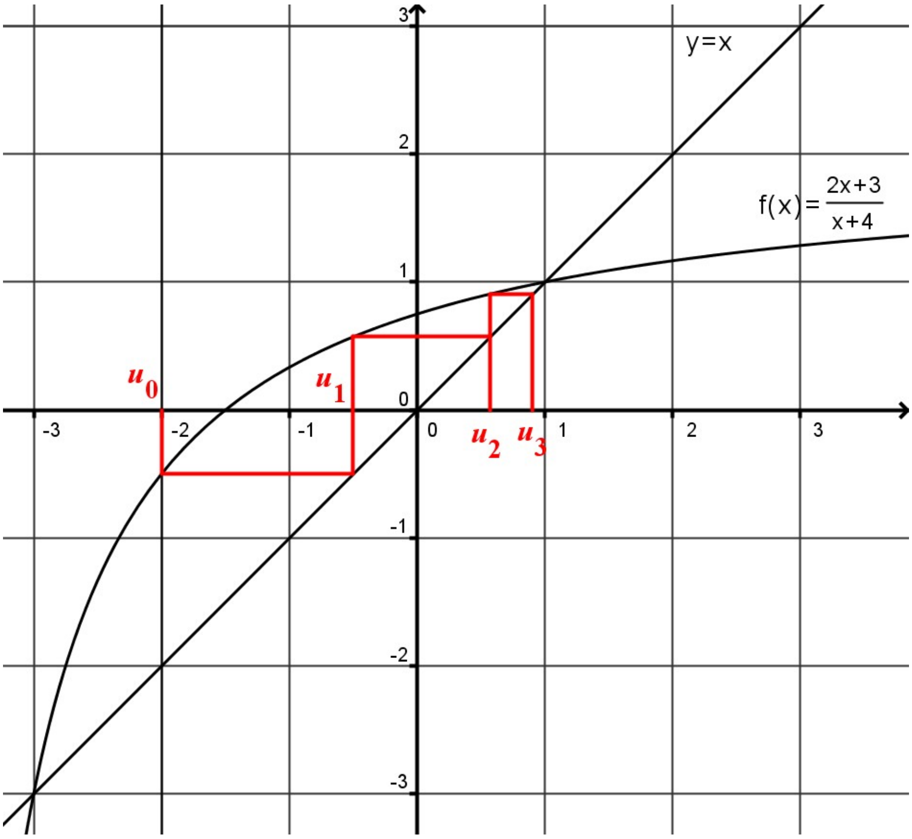
$$n = \frac{-1+289}{4} = 72$$

On peut donc faire 72 étages avec 10 440 allumettes !

Exercice 5

Une récurrence homographique (5 points)

1) Déterminer graphiquement les termes : u_1, u_2 et u_3. On construira les trois termes sur le graphique (à rendre) et on donnera la valeur la plus précise que peut donner le graphique.



On trouve alors $u_1 \simeq -0,5$, $u_2 \simeq 0,6$, $u_3 \simeq 0,9$

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 1.

2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_0.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3}$$

$$= \frac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12}$$

$$= \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5}v_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{5}$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{-2-1}{1} = -3$.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

$$v_n = -3\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

On sait que : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$, donc

$$\begin{aligned} v_n(u_n+3) &= u_n - 1 \\ u_n v_n + 3v_n &= u_n - 1 \\ u_n(v_n - 1) &= -1 - v_n \\ u_n &= \frac{-1-3v_n}{v_n - 1} = \frac{1+3v_n}{1-v_n} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$u_n = \frac{1 - 9\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1 + 3\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$$

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$

d'après le théorème sur les opérations sur les limites, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

La conjecture est vérifiée !

5) Si on avait pris comme premier terme de la suite (u_n) : $u_0 = -3$, la suite aurait-elle eu la même limite ? Dans le cas contraire, quelle est la nature de cette suite (Vous justifierez la réponse).

Si $u_0 = -3$, la suite v_n n'existe pas. De plus :

$$u_1 = \frac{2(-3)+3}{-3+4} = \frac{-6+3}{1} = -3$$

La suite est donc constante et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -3$. Sa limite est donc -3