Contrôle de mathématiques

Correction du jeudi 7 avril 2011

Exercice 1

Angles orientés (3 points)

1) Le triangle ABD est isocèle rectangle donc : $\widehat{DBA} = \dfrac{\pi}{4}$

On a alors : $\widehat{ABI} = \widehat{DBI} - \widehat{DBA} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$

On en déduit alors : $\widehat{BAI} = \pi - \widehat{AIB} - \widehat{ABI} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$

$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{7\pi}{12}$

2) a) D'après la figure $AB = AD$ et $CB = CD$ Donc (AC) est la médiatrice de $[BD]$. Donc D est l'image de B par la réflexion d'axe (AC). (AC) est donc un axe de symétrie de $ABCD$.

b) (AC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$

3) $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \pi.$

Les points I, A et C sont donc alignés

Exercice 2

Lignes trigonométriques (4 points)

1) Donner la valeur exacte des nombres suivants en passant par la mesure principale si nécessaire :

a) $A = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $B = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $C = \sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $D = \cos\left(\dfrac{19\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $E = \tan\left(\dfrac{25\pi}{6}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

f) $F = \cos\left(\dfrac{2000\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

2) Calculer à l'aide de $\sin x$ la quantité suivante :

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x) &= -\sin x - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4\sin x \\ &= -\sin x + 3\sin x - 4\sin x \\ &= -2\sin x\end{aligned}$$

3) a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ tels que : $\cos a = \frac{3}{5}$ et $\sin b = -\frac{1}{3}$.

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Comme $a \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, $\sin a \leqslant 0$,

$$\sin a = -\frac{4}{5}$$

$$\cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Comme $b \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, $\cos b \geqslant 0$,

$$\cos b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 3
Équations trigonométriques (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

On obtient alors :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

On obtient alors les solutions suivantes :

$$x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

On obtient alors :

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

On obtient alors les solutions suivantes :

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

c) $3 - 4\cos^2 x = 0$

On obtient :

$$\cos^2 = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a alors :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$$

On obtient alors les solutions :

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

d) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

On pose $X = \cos x$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$, on obtient alors :

$$2X^2 - 3X + 1 = 0$$

On a alors 2 solutions : $X' = 1$ (solution évidente) et $X'' = \dfrac{1}{2}$

On revient à x :

$$\cos x = 1 \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

On obtient alors les solutions :

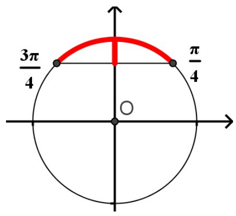
$$x = k2\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) Résoudre les inéquations suivante dans l'intervalle I, en dessinant sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points M qui conviennent :

a) $I = [-\pi; \pi]$ $\quad \sqrt{2}\sin x - 1 > 0$

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

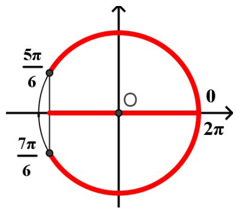
$$S = \left]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$$



b) $I = [0; 2\pi]$ $\quad 2\cos x + \sqrt{3} \geqslant 0$

$$\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left[0; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right]$$



Exercice 4
Coordonnées polaires (5 points)

1) Indiquer les coordonnées polaires (r, θ), avec $\theta \in [0; 2\pi]$, de chacun des points repérés sur le figure ci-dessous. (1,5 points)

$A\left(2; \dfrac{11\pi}{6}\right)$ $\quad C\left(2\sqrt{2}; \dfrac{7\pi}{4}\right)$ $\quad E\left(4; \dfrac{\pi}{6}\right)$

$B\left(2; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ $\quad D\left(2\sqrt{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ $\quad F\left(4; \dfrac{5\pi}{6}\right)$

2) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points suivants définis par leurs coordonnées polaires. On **détaillera les calculs** (1,5 points)

a) $A\left(3; \dfrac{5\pi}{6}\right) = \left(3\cos\dfrac{5\pi}{6}; 3\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$

b) $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\cos\frac{-\pi}{4};\frac{1}{2}\sin\frac{-\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

c) $C\left(\sqrt{3};\frac{7\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{4};\ \sqrt{3}\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

3) Déterminer les coordonnées polaires (r,θ) des points suivants définis par leurs coordonnées cartésiennes. On prendra $\theta\in[0;2\pi[$ et l'on **détaillera les calculs**

a) $D\left(2\sqrt{3};2\right)$

On obtient : $r=4$ et $\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{\pi}{6}$

b) $E(-5;0)$

On obtient : $r=5$ et $\theta=\pi$

c) $F\left(0;\frac{3}{4}\right)$

On obtient : $r=\frac{3}{4}$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$

d) $G\left(2;-2\sqrt{3}\right)$

On obtient : $r=4$ et $\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{5\pi}{3}$

e) $H\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

On obtient : $r=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{3\pi}{4}$

f) $I\left(-\sqrt{6};\ \sqrt{2}\right)$

On obtient : $r=2\sqrt{2}$ et $\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{5\pi}{6}$

Exercice 5

Coordonnées polaires et polygones (3 points)

En expliquant la démarche suivie, déterminer les coordonnées polaires, (r,θ), avec $\theta\in[0;2\pi]$, des sommets :

L'angle au centre pour le triangle équilatéral est de $\frac{2\pi}{3}$ et pour le pentagone $\frac{2\pi}{5}$. On a alors

1) $A\left(4;\frac{\pi}{4}\right)$,

$B\left(4;\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=\left(4;\frac{11\pi}{12}\right)$,

$C\left(4;\frac{11\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)=\left(4;\frac{19\pi}{12}\right)$

2) $D\left(4;\dfrac{\pi}{6}\right)$,
$E\left(4;\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{5}\right)=\left(4;\dfrac{17\pi}{30}\right)$,
$F\left(4;\dfrac{17\pi}{30}+\dfrac{2\pi}{5}\right)=\left(4;\dfrac{29\pi}{30}\right)$,
$G\left(4;\dfrac{29\pi}{30}+\dfrac{2\pi}{5}\right)=\left(4;\dfrac{41\pi}{30}\right)$,
$H\left(4;\dfrac{41\pi}{30}+\dfrac{2\pi}{5}\right)=\left(4;\dfrac{53\pi}{30}\right)$