Correction du devoir du lundi 4 janvier 2016

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(4 points)**

1) **Affirmation vraie.** $f'(x) = -4x + 6$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

   De plus le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $(-4x + 6)$ donc :

   si $x < \dfrac{3}{2}$ alors, $f'(x) > 0$ donc si $x \in [0; 1]$, $f'(x) > 0$, la fonction f est alors croissante.

2) **Affirmation vraie.** Par exemple la fonction cube $f(x) = x^3$ est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas de maximum.

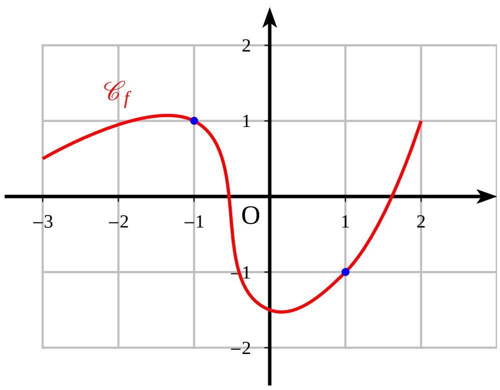
3) **Affirmation fausse.** Contre exemple : soient deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

   $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$ on a alors $f'(x) = g'(x) = 1$ et pourtant $f \neq g$.

4) **Affirmation fausse.** Contre exemple graphique : prendre une fonction non monotone sur $[-1\ ;\ 1]$:

   On a : $f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$

   $f(-1) > f(1)$ et pourtant f n'est pas décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$



   On pourrait donner, comme Ludovico, une fonction explicite : $f(x) = x^2 - x$, dont la représentation est une parabole de sommet $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ donc non décroissante sur $[0\ ; 1]$ avec $f(-1) = 2 > f(1) = 0$

EXERCICE 2

Dérivée **(3 points)**

1) $f'(x) = 6x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2 + 7}{2\sqrt{x}} = \dfrac{12x^2 + 3x^2 + 7}{2\sqrt{2}} = \dfrac{15x^2 + 7}{2\sqrt{x}}$

2) $g'(x) = -3 - \dfrac{7}{(x + 1)^2}$ mettre au dénominateur n'apportant rien sur le signe de $g'(x)$

3) $$h'(x) = \frac{(2x - 3)(4x^2 - 5x + 1) - (8x - 5)(x^2 - 3x - 5)}{(4x^2 - 5x + 1)^2}$$

$$= \frac{8x^3 - 10x^2 + 2x - 12x^2 + 15x - 3 - 8x^3 + 24x^2 + 40x + 5x^2 - 15x - 25}{(4x^2 - 5x + 1)^2}$$

$$= \frac{7x^2 + 42x - 28}{(4x^2 - 5x + 1)^2} = \frac{7(x^2 + 6x - 4)}{(4x^2 - 5x + 1)^2}$$

EXERCICE 3

Valeur absolue **(4 points)**

1) $f(x) = x\sqrt{x}$ pour $x > 0$.

2) $f(x) = x\sqrt{-x}$ pour $x < 0$.

3) $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ pour $x > 0$.

4) $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{|h|} - 0}{h} = \sqrt{|h|}$

On passe à la limite : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$.

La fonction est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

EXERCICE 4

Fonction cube **(6 points)**

1) f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$

2) • $f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 6x + 2 = 0$. On a $\Delta = 36 - 24 = 12 = (2\sqrt{3})^2$

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} \approx -0,42 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{3} \approx -1,58$$

• Le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $3x^2 + 6x + 2$

Un calcul exacte donne pour $f(x_1) = 1 - \dfrac{2}{9}\sqrt{3} \approx 0,61$ et $f(x_2) = 1 + \dfrac{2}{9}\sqrt{3} \approx 1,38$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	≈ 1.38	$\searrow$	≈ 0.61	$\nearrow$	$+\infty$

3) On développe :
$(x + 2)^2(x - 1) = ((x^2 + 4x + 4)(x - 1) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4 = x^3 + 3x^2 - 4$

4) $T : y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$

$f'(-2) = 12 - 12 + 2 = 2$ et $f(-2) = -8 + 12 - 4 + 1 = 1$.

On a donc : $T : y = 2(x + 2) + 1 \iff y = 2x + 5$

5) $2x_S + 5 = 2(-4) + 5 = -3 = y_S$. S appartient donc à T.

6) La position relative entre $\mathscr{C}_f$ et T est donnée par le signe de $g(x) = f(x) - (2x + 5)$

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)^2(x - 1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

- Si $x \in [-3\,;-2[\cup]-2\,;\,0]$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T.
- Si $x = -2$, $\mathscr{C}_f$ et T sont confondues.

EXERCICE 5

Algorithme **(3 points)**

1) L'algorithme renvoie les valeurs de $\sqrt{F1(X)}$ lorsque cela est possible, sinon il affiche un message disant que $\sqrt{F1(X)}$ n'est pas défini.

2) Le programme exécute les deux dernières lignes lorsque $F1(X) < 0$, soit pour $X < -\dfrac{2}{3}$

3) Il faut donner une fonction qui est toujours positive ou nulle.
Par exemple $F1(X) = X^2 + 1$