Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 21 mars 2016

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

1) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - (n+1) - 2 - 2n^2 + n + 2$
$= 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 - 2 - 2n^2 + n + 2 = 4n + 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\quad 4n + 1 \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
La suite (u_n) est donc croissante.

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) a) $u_{20} = u_{10} + 10r \quad \Leftrightarrow \quad r = \dfrac{u_{20} - u_{10}}{10} = \dfrac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}}{10} = \dfrac{3}{10}$

$u_{10} = u_0 + 10r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_{10} - 10r = \dfrac{1}{2} - 3 = -\dfrac{5}{2}$

b) $u_{100} = u_0 + 100r = -\dfrac{5}{2} + 30 = \dfrac{55}{2}$

2) a) $v_7 = v_4 q^3 \quad \Leftrightarrow \quad q^3 = \dfrac{v_7}{v_4} = \dfrac{384}{48} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad q = 2$

$v_4 = v_0\, q^4 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \dfrac{v_4}{q^4} = \dfrac{48}{16} = 3$

b) $v_n = 24\,576 \quad \Leftrightarrow \quad v_0\, q^n = 24\,576 \quad \Leftrightarrow \quad 2^n = \dfrac{24\,576}{3} = 8\,196 \quad \Leftrightarrow \quad n = 13$

c) $S = 3 + 6 + 12 + \cdots + 24\,576 = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{13}$
S est la somme des 14 premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 3, on a alors :

$$s = v_0 \frac{1 - q^{14}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2} = 3\left(2^{14} - 1\right) = 49\,149$$

EXERCICE 3

Limite d'une suite **(5 points)**

1) a) $u_1 = \dfrac{1}{3} \times (-3) + 4 = -1 + 4 = 3$

$u_2 = \dfrac{1}{3} \times 3 + 4 = 1 + 4 = 5 \quad$ et $\quad u_3 = \dfrac{1}{3} \times 5 + 4 = \dfrac{5 + 12}{3} = \dfrac{17}{3}$

b) La suite (u_n) n'est pas géométrique car : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{3}{-3} = -1$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{3}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \dfrac{1}{3}u_n - 2 = \dfrac{u_n - 6}{3} = \dfrac{1}{3}v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{3}$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 6 = -9$

b) $v_n = v_0\, q^n = -9\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ d'où $u_n = v_n + 6 = -9\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.

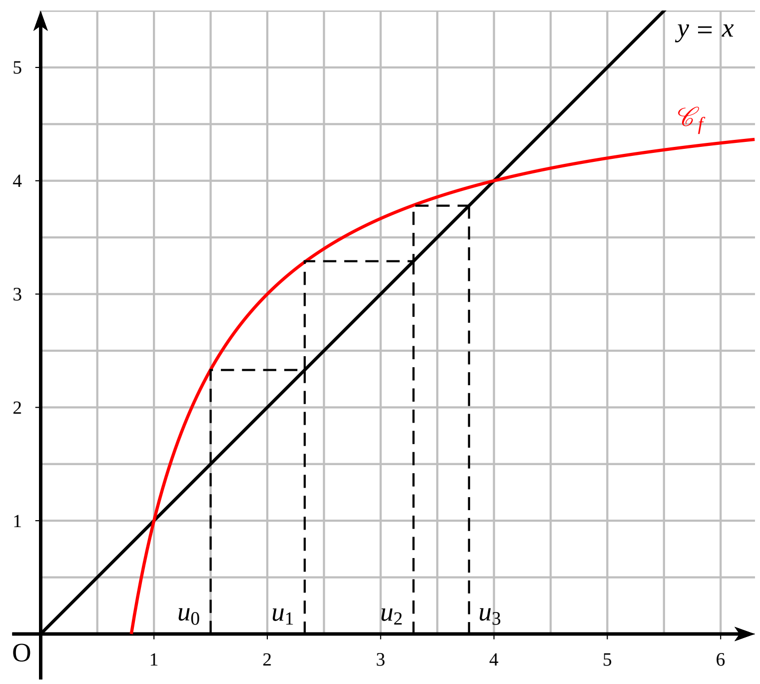
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$.

Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

Exercice 4

Visualisation d'une suite **(3 points)**

1) a) On obtient le graphique suivant :



b) La droite d'équation $y = x$ permet de reporter les termes sur l'axe des abscisses.

c) On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et converge vers 4.

2) On obtient l'algorithme suivant : (on trouve alors $n = 7$)

Variables : N : entiers et U réel
Entrées et initialisation
  $0 \to N$
  $1.5 \to U$
Traitement
  tant que $|U - 4| \geqslant 10^{-3}$ **faire**
    $N + 1 \to N$
    $5 - \dfrac{4}{U} \to U$
  fin
Sorties : Afficher N

EXERCICE 5

Château de cartes **(5 points)**

1) On a respectivement 26 et 40 cartes aux étapes 4 et 5

2) Soit la suite (u_n) tel que u_{n+1} représente le nombre de cartes supplémentaires nécessaires pour construire un nouvel étage sachant qu'on en a construit n.

   Pour construire un nouvel étage, il faut trois cartes supplémentaires par rapport à l'étage inférieur. La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 2$.

   On a alors $u_n = u_1 + 3(n-1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

   Le nombre de carte nécessaires à l'étape n est donc :

   $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1)$

3) S_n est donc la somme des n premier terme d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, donc :

   $S_n = n\left(\dfrac{u_1 + u_n}{2}\right) = n\left(\dfrac{2 + 3n - 1}{2}\right) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$.

   $S_{10} = \dfrac{10 \times 31}{2} = 155$

4) a) Pour construire un étage supplémentaire, il faut s'assurer qu'il existe encore assez de cartes pour en un construire un autre. Si l'on a construit k étage et que l'on veut en construire un autre, le nombre de cartes nécessaires est $u_{k+1} = u_1 + 3k = 2 + 3k$.
   Il faut donc que $S + 3K + 2 \leqslant N$

   b) On peut construire 28 étages avec 1200 cartes et il en restera 10 ($S = 1190$).