Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 23 mai 2016

Exercice 1

Figure **(1,5 points)**

- Première figure : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC \cos 45 = -2 \times 3 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$
- Deuxième figure : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 5 \times 3 = 15$
- Troisième figure : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 + 4 = 1$

Exercice 2

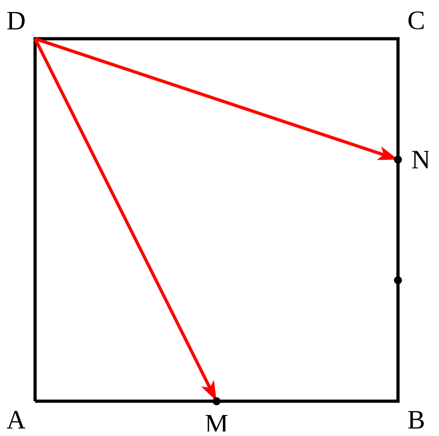
Orthogonalité **(1,5 points)**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -m+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4m \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12m + m - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{2}{13}$$

Exercice 3

Angle **(3 points)**

1) Voir ci-contre.



2) $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = DM \times DN \cos(\widehat{MDN})$

$DM = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$DN = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

$$\cos(\widehat{MDN}) = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}}{DM \times DN} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{MDN} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4

Parallélogramme **(3 points)**

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2 \right)$

$= \frac{1}{2}(36 - 16 - 9) = \frac{11}{2}$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \cos(\widehat{BAD}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BAD}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{AB \times AD} = \dfrac{\frac{11}{2}}{4 \times 3} = \dfrac{11}{24}$

$\widehat{BAD} = \arccos\left(\dfrac{11}{24}\right) \approx 62,7°$

3) a) $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2$

b) $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2 = 16 - 2 \times \dfrac{11}{2} + 9 = 14$, or $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{14}$

EXERCICE 5

Droite et cercle **(5 points)**

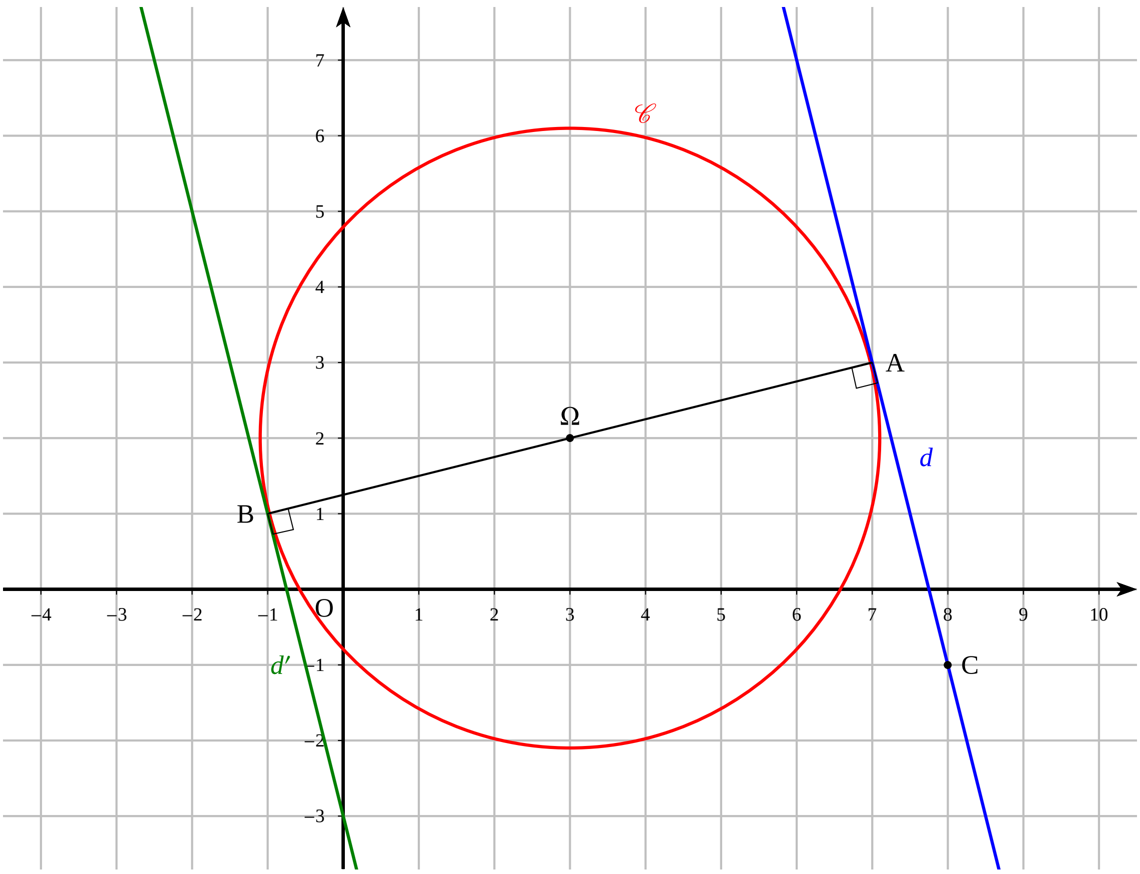
1) a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$
$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 17.$

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(3\,;\,2)$ et de rayon $r = \sqrt{17}$.

b) On remplace x et y par les coordonnée de A et de B :
- Pour A : $(7-3)^2 + (3-2)^2 = 16 + 1 = 17$ vérifié
- Pour B : $(-1-3)^2 + (1-2)^2 = 16 + 1 = 17$ vérifié

Les point A et B appartiennent bien au cercle $\mathscr{C}$.

c) On obtient la figure suivante :



2) a) On remplace les coordonnées de A dans l'équation de la droite d :
$4 \times 7 + 3 - 31 = 28 + 3 - 31 = 0$ donc $A \in d$

b) Il faut déterminer un deuxième point pour tracer la droite d. Pour $x = 8$, on trouve $y = 31 - 4x = 31 - 4 \times 8 = -1$. Le point C(8 ; −1) est sur la droite d

c) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite d, on a alors $\vec{u}(-1\,;\,4)$.

Montrons que $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\Omega A} = (7-3\,;\,3-2) = (4\,;\,1)$:

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0.$

$\vec{u} \perp \overrightarrow{\Omega A}$ donc la droite d est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.

d) $\overrightarrow{\Omega B} = (-1-3\,;\,1-2) = (-4\,;-1) = -\overrightarrow{\Omega A}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont colinéaires et donc les points A, Ω, B sont alignés. Le segment [AB] est un diamètre du cercle, en conséquence les droites tangentes au cercle $\mathscr{C}$ respectivement en A et B sont parallèles.

Exercice 6

Relation d'Al-Kashi **(3 points)**

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC}) \iff 2bc\cos(\widehat{BAC}) = b^2 + c^2 - a^2 \iff$

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

2) $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{8^2 + 10^2 - 6^2}{2 \times 8 \times 10} = \dfrac{128}{160} = 0,8$, donc $\widehat{BAC} = \arccos(0,8) \approx 36,9^\circ$.

3) $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{6^2 + 10^2 - 8^2}{2 \times 6 \times 10} = \dfrac{72}{120} = 0,6$,

donc $\widehat{ABC} = \arccos(0,6) \approx 53,1^\circ$.

Exercice 7

Théorème de la médiane **(3 points)**

1) Voir cours.

2) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2} \iff AI^2 = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} = \dfrac{27}{4}$

$AI = \dfrac{\sqrt{27}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$