Contrôle de mathématiques

Mardi 26 janvier 2016

EXERCICE 1

Tableau de variation **(5 points)**

On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition D_f. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur D_f.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	0

À partir du tableau de variation, répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2) Déterminer le signe de la dérivée $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   On pourra présenter le résultat à l'aide d'un tableau de signes.
3) Donner les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
4) f admet-elle une limite en -2 ? Pourquoi ? Si oui donner $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
5) Pourquoi la fonction f n'a-t-elle pas de limite en 1 ? Donner la limite à droite et la limite à gauche de f en 1.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
6) Construire, à l'aide du repère tracé à l'annexe 1 (à rendre avec la copie), une courbe susceptible de représenter la fonction f.
7) Que dire de la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans l'intervalle $]-2\,;\,1[$?

EXERCICE 2

Calculs de limites **(6 points)**

Déterminer les limites suivantes en détaillant les calculs et en précisant la méthode de calcul.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x)$ avec $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 2$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$ avec $f_2(x) = \dfrac{x-2}{3-2x}$
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x)$ avec $f_3(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$
4) $\lim\limits_{x \to 1^+} f_4(x)$ avec $f_4(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$

5) $\lim\limits_{x \to 2^+} f_5(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} f_5(x)$ avec $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

EXERCICE 3

Courbe **(3 points)**

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Cette courbe est représentée en annexe 2.
À partir de la représentation de la fonction f, répondre aux questions suivantes :

1) Donner les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2) Donner, en vous justifiant, le signe de $f'(x)$. Pourquoi $f'(0) = 0$?

3) Tracer soigneusement sur le graphique, la droite d d'équation $y = x + 3$.

4) Déterminer graphiquement l'équation $f(x) = x + 3$.

5) Que peut-on dire de la droite d par rapport à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$? Pourquoi ?

EXERCICE 4

Étude d'une fonction **(8 points)**

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 5}$
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1) Pourquoi la fonction f est-elle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

3) a) Déterminer la fonction dérivée f' puis montrer que : $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 6x + 15)}{(x^2 - 3x + 5)^2}$.

   b) Déterminer les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. En déduire le signe de $f'(x)$

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   d) Pourquoi la fonction f n'admet pas un extremum en 0 ?

4) a) Montrer que : $g(x) = f(x) - (x + 3) = \dfrac{4x - 15}{x^2 - 3x + 5}$

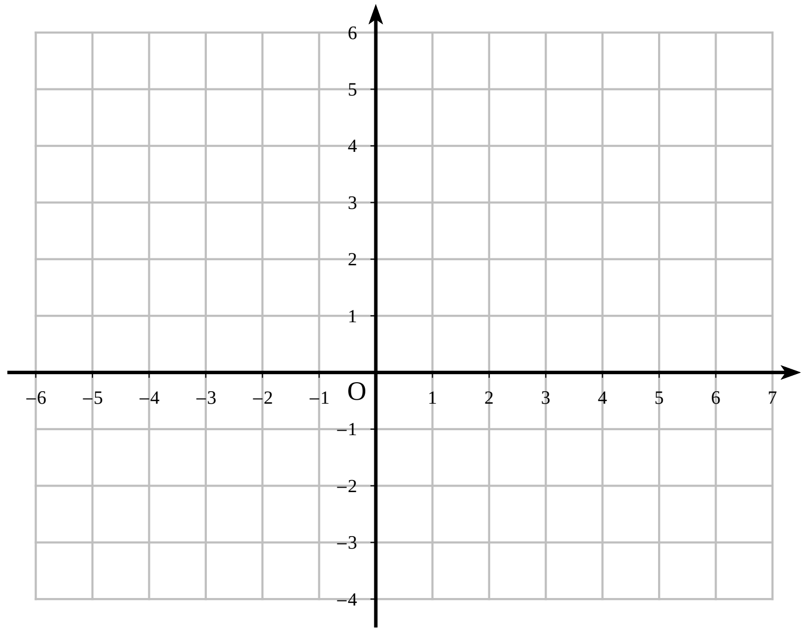
   b) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la quantité $g(x) = \dfrac{4x - 15}{x^2 - 3x + 5}$.

   c) Pourquoi peut-on dire que la droite d d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$?

   d) Résoudre l'équation $f(x) = x + 3$. Que cela signifie-t-il pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Nom :
Prénom :

Annexe 1
(À rendre avec la copie)



Annexe 2
(À rendre avec la copie)