Correction contrôle de mathématiques

Du mardi 26 janvier 2016

EXERCICE 1

Tableau de variation **(5 points)**

1) $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 1\} =]-\infty\,; -2[\cup]-2\,;\ 1[\cup]1\,; +\infty[$.

2) On obtient le tableau de signes suivant pour la dérivée :

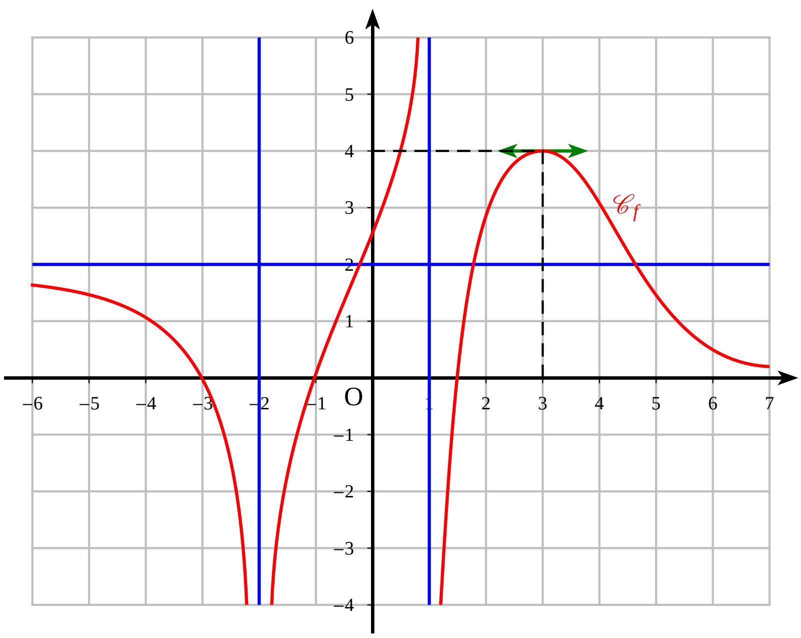
x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	||	$+$	0	$-$	

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
Les droites d'équation $y = 2$ et $y = 0$ sont respectivement asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

4) f admet une limite en 2 car : $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$.
On a alors : $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -\infty$.
La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en -2.

5) f n'a pas de limite en 1 car en 1 la limite à gauche n'est pas égale à la limite à droite.
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en 1.

6) On peut tracer la courbe suivante :



7) La concavité change de signe dans l'intervalle $]-2\,;\ 1[$; de concave en -2 elle devient convexe en 1.

Exercice 2

Calculs de limites **(6 points)**

1) $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 2 = x^2\left(2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty \end{array}$$

2) $f_2(x) = \dfrac{x-2}{3-2x} = \dfrac{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x} - 2\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x} - 2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} - 2 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

3) $f_3(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{x^3}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty \end{array}$$

4) On étudie le signe de $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^+} 2x + 1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to1^+} 1 - x = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to1^+} f_4(x) = -\infty \end{array}$$

5) On étudie le signe de $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^+} 2x = 4 \\ \lim\limits_{x\to2^+} x^2 - 4 = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to2^+} f_5(x) = +\infty \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} 2x = -4 \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2 - 4 = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-2^-} f_5(x) = -\infty \end{array}$$

Exercice 3

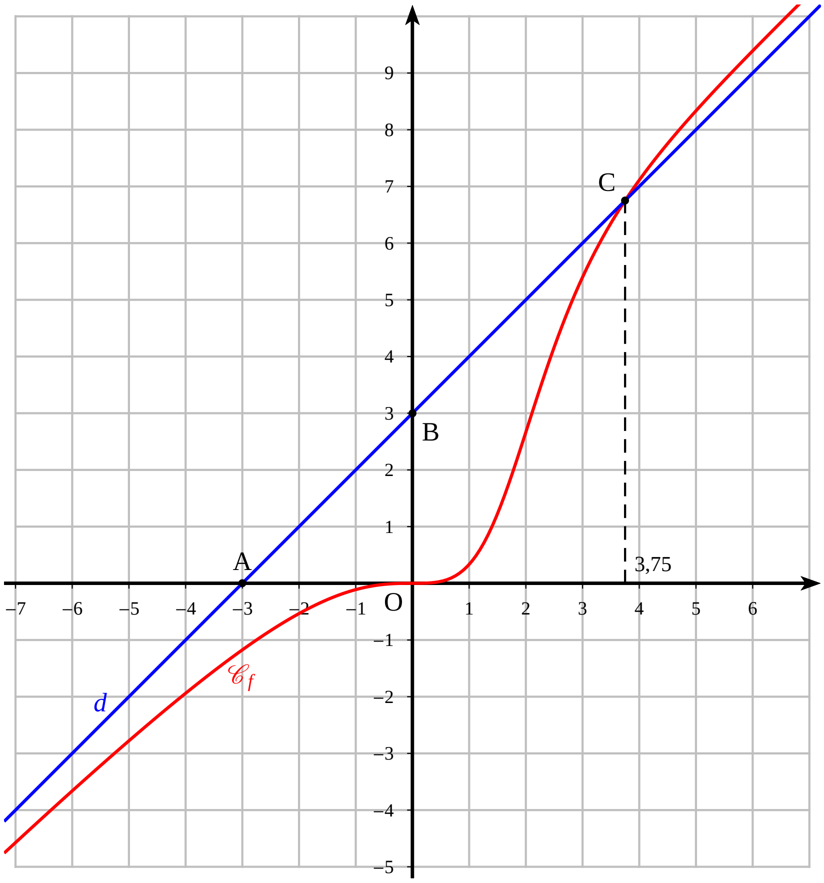
Courbe **(3 points)**

1) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) \geqslant 0$

$f'(0) = 0$ car la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en 0.

3) Pour tracer la droite d, on peut prendre les points A$(-3\ ;\ 0)$ et B$(0\ ;\ 3)$.



4) On cherche l'abscisse du point C intersection de $\mathscr{C}_f$ avec d. On trouve $x = 3,75$

5) d semble être une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$ car $\mathscr{C}_f$ se rapproche de plus en plus de la droite d en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 4

Étude d'une fonction **(8 points)**

1) On cherche les racines de $x^2 - 3x + 5$.
$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$. Il n'y a pas de racines, donc $D_f = \mathbb{R}$.

2) $$f(x) = \frac{x^3}{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)} = \frac{x}{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

De même, on trouve : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3) a) $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3x+5) - x^3(2x-3)}{(x^2-3x+5)^2} = \frac{x^2(3x^2 - 9x + 15 - 2x^2 + 3x)}{(x^2-3x+5)^2}$$
$$= \frac{x^2(x^2 - 6x + 15}{(x^2-3x+5)^2}$$

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x^2 - 6x + 15 = 0$

$\Delta = 36 - 60 = -24 < 0$ pas de racine et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 6x + 15 > 0$

f' ne s'annule qu'une fois en $x = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) > 0$

c) On obtient la tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) f n'admet pas d'extremum en 0 car f' ne change pas de signe en 0.

4) a) $g(x) = f(x) - (x+3) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 5} - (x+3) = \dfrac{x^3 - (x+3)(x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 3x + 5}$

$$= \frac{x^3 - (x^3 - 3x^2 + 5x + 3x^2 - 9x + 15)}{x^2 - 3x + 5} = \frac{x^3 - x^3 + 3x^2 - 5x - 3x^2 + 9x - 15}{x^2 - 3x + 5}$$

$$= \frac{4x - 15}{x^2 - 3x + 5}$$

b) $g(x) = \dfrac{4x - 15}{x^2 - 3x + 5} = \dfrac{x\left(4 - \dfrac{15}{x}\right)}{x\left(x - 3 + \dfrac{5}{x}\right)} = \dfrac{4 - \dfrac{15}{x}}{x - 3 + \dfrac{5}{x}}.$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} 4 - \frac{15}{x} = 4 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} x - 3 + \frac{5}{x} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \end{array}$$

De même, on trouve : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$

c) d est asymptote à $\mathscr{C}_f$ car la différence $g(x) = f(x) - (x+3)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

d) $f(x) = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4x - 15}{x^2 - 3x + 5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{15}{4}$

Remarque : On peut observer que $\mathscr{C}_f$ est la même courbe qu'à l'exercice 3.