Correction contrôle de mathématiques
Du mercredi 30 novembre 2016

EXERCICE 1

Ensemble de définition **(4 points)**

1) Racine de $x^2 - 3x + 2$. $x_1 = 1$ racine évidente, $P = 2$ donc $x_2 = 2$.

   Conclusion : $D_f = \mathbb{R} - \{1 ; 2\}$

2) Condition : $2x - 5 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \dfrac{5}{2}$.

   Conclusion : $D_f = \left[\dfrac{5}{2} ; +\infty\right[$

3) Condition : $2 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x > -2 \quad \Leftrightarrow x < 2$

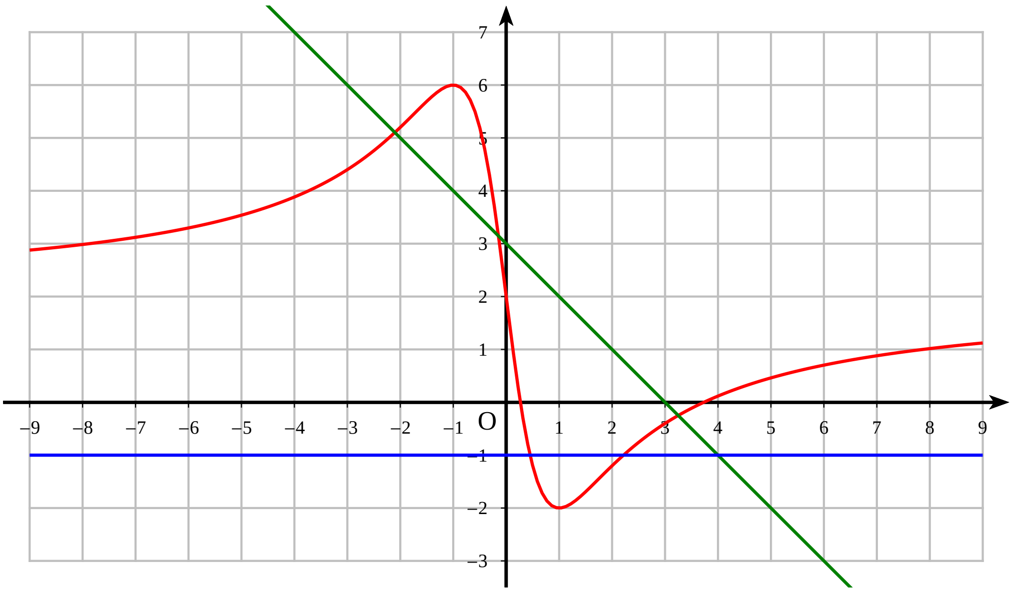
   Conclusion : $D_f =]-\infty ; 2[$

4) Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x - 5| \geqslant 0$, alors $D_f = \mathbb{R}$

EXERCICE 2

Résolution graphique **(6 points)**

1) On obtient l'allure de la courbe suivante :



2) a) On obtient le tableau de variation de la fonction f suivant :

x	-9		-1		1		9
$f(x)$			6				$1{,}12$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$2{,}87$				-2		

b) L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β car la courbe coupe deux fois l'axe des abscisses.

On trouve les valeurs approchées suivantes (fonction zéro) $\alpha \approx 0,27$ et $\beta \approx 3,73$.

c) On trace la droite horizontale $y = -1$.
On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont en dessous ou sur la droite d'équation $y = -1,5$.

On trouve S=[0,45 ; 2,22]

d) On trace la droite d'équation $y = -x + 3$. On cherche les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite. On trouve une solution positive $x \approx 3,25$

Exercice 3

Valeur absolue **(4 points)**

1) a)
$$\begin{aligned} 3 - 4|x-2| = -5 &\Leftrightarrow -4|x-2| = -8 \Leftrightarrow |x-2| = 2 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 2 \text{ ou } -x+2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

$S = \{0\ ;\ 4\}$

b)
$$\begin{aligned} |5x+1| = |2-7x| &\Leftrightarrow 5x+1 = 2-7x \text{ ou } 5x+1 = -2+7x \\ &\Leftrightarrow 12x = 1 \text{ ou } -2x = -3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{12} \text{ ou } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$S = \left\{\frac{1}{12}\ ;\ \frac{3}{2}\right\}$

c) $|4x+1| < 7 \Leftrightarrow -7 < 4x+1 < 7 \Leftrightarrow -8 < x < 6 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{3}{2}$

$S = \left]-2\ ;\ \frac{3}{2}\right[$

d)
$$\begin{aligned} |3x+2| \geqslant 10 &\Leftrightarrow 3x+2 \geqslant 10 \text{ ou } -3x-2 \geqslant 10 \\ &\Leftrightarrow 3x \geqslant 8 \text{ ou } -3x \geqslant 12 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{8}{3} \text{ ou } x \leqslant -4 \end{aligned}$$

$S =]-\infty\ ; -4] \cup \left[\frac{8}{3}\ ; +\infty\right[$

2) $\mathrm{I} = [-7; 3]$, on cherche

$$\left.\begin{array}{l} \text{le centre de l'intervalle } \dfrac{-7+3}{2} = -2 \\ \text{puis le rayon } r = 3 - (-2) = 5 \end{array}\right\} \text{On a alors } |x+2| \leqslant 5.$$

$\mathrm{J} =]-\infty\ ; -3[\cup]5\ ; +\infty[$, on cherche

$$\left.\begin{array}{l} \text{le centre de l'union d'intervalles } \dfrac{-3+5}{2} = 1 \\ \text{puis le rayon } r = 5 - 1 = 4 \end{array}\right\} \text{On a alors } |x-1| > 4.$$

EXERCICE 4

Variation des fonctions carrées et homographiques **(2 points)**

1) On obtient le tableau de variation de la fonction $f(x) = -2(x+1)^2 + 7$ suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	7	↘	$-\infty$

2) On obtient le tableau de variation de la fonction $g(x) = 4 + \dfrac{5}{x+3}$ suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

EXERCICE 5

Variation des fonctions associées **(4 points)**

1) $f(x) = \sqrt{x-3}$ sur $\mathrm{I} = [3\,;+\infty[$

On pose $u(x) = x - 3$ donc $f = \sqrt{u}$

- u est une fonction affine croissante car $a = 1 > 0$.
- Si $x \in \mathrm{I}$ alors $x - 3 \geqslant 0$ donc $\sqrt{u}$ existe.
- u et $\sqrt{u}$ ont même variation, donc f est croissante sur I.

2) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+4}$ sur $\mathrm{I} =]-\infty\,;\,0]$ et $\mathrm{J} = [0\,;+\infty[$

On pose $u(x) = x^2$, $v = u + 4$, $w = \dfrac{1}{v}$, donc $f = 3w$

a) Sur I :
- La fonction carrée est décroissante, donc u est décroissante.
- u et $u + 4$ ont même variation, donc v est décroissante.
- v et $\dfrac{1}{v}$ ont des variations contraires donc w est croissante.
- w et $3w$ ont même variation ($\lambda = 3 > 0$) donc f est croissante.

b) Sur J :
- La fonction carrée est croissante, donc u est croissante.
- u et $u + 4$ ont même variation, donc v est croissante.
- v et $\dfrac{1}{v}$ ont des variations contraires donc w est décroissante.
- w et $3w$ ont même variation ($\lambda = 3 > 0$) donc f est décroissante.

3) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{2-x}}$ sur $\text{I} =]-\infty\,;\,2[$

On pose $u(x) = 2 - x$, $v = \sqrt{u}$, $w = \dfrac{1}{v}$ donc $f = -3w$

- u est une fonction affine décroissante car $a = -1 < 0$
- Si $x \in \text{I}$ alors $2 - x > 0$ donc $\sqrt{u}$ existe.
- u et $\sqrt{u}$ ont même variation donc v est décroissante.
- v et $\dfrac{1}{v}$ ont des variations contraires donc w est croissante.
- w et $-3w$ ont des variations contraires ($\lambda = -3 < 0$) donc f est décroissante.