Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 14 décembre 2016

Exercice 1

Nombre dérivé **(3 points)**

1) Une fonction f admet un nombre dérivé, noté $f'(a)$, en a, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2) On obtient le tableau suivant :

x	-3	0	2	4
$f(x)$	1	-1	-2	-1
$f'(x)$	$-\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{3}{2}$

Exercice 2

Calcul de dérivée **(9 points)**

1) Dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = -6x^2 + 6x + 6 = 6(-x^2 + x + 1)$

2) Dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{10}{x^3}$

3) Dérivable si $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$, dérivable sur $]-\infty\,;\,4[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$

4) Dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{-18}{(2x+1)^2}$

5) Dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

6) Dérivable si $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$, dérivable sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$,

$$f'(x) = 4\sqrt{2x+3} + (4x-7) \times \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{4(2x+3) + 4x - 7}{\sqrt{2x+3}}$$
$$= \frac{8x + 12 + 4x - 7}{\sqrt{2x+3}} = \frac{12x+5}{\sqrt{2x+3}}$$

7) Dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(-x^2 + x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

8) Dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(-2x+3)(-x^2+3x+5)^2$

EXERCICE 3

Tangente à une courbe **(4 points)**

1) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$.

2) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \;\text{ ou }\; x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \;\text{ ou }\; x = -2$.

$\mathscr{C}_f$ admet donc deux tangentes horizontales en -2 et 2.

3) Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $a = 1$: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$f(1) = 1 - 12 + 7 = -4$ et $f'(1) = 3 - 12 = -9$ donc

$y = -9(x-1) - 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = -9x + 5$.

4) signe de $f'(x)$ = signe de $(x^2 - 4)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	23	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

5) $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite d d'équation $y = -\dfrac{11}{3}x + 1$ ssi,

$f'(x) = -\dfrac{11}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3(x^2 - 4) = -\dfrac{11}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = -\dfrac{11}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\dfrac{11}{9} + 4 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 = \dfrac{25}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{5}{3} \;\text{ ou }\; x = \dfrac{5}{3}$

$\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à la droite d en $-\dfrac{5}{3}$ et en $\dfrac{5}{3}$

EXERCICE 4

Étude d'une fonction **(4 points)**

1) $f'(x) = 4 - \left(-\dfrac{-1}{(3-x)^2}\right) = \dfrac{4(3-x)^2 - 1}{(3-x)^2} = \dfrac{[2(3-x)-1][2(3-x)+1]}{(3-x)^2} = \dfrac{(-2x+5)(-2x+7)}{(3-x)^2}$

2) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 5 = 0 \;\text{ ou }\; -2x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5}{2} \;\text{ ou }\; x = \dfrac{7}{2}$

• signe de $f'(x)$ = signe de $(-2x+5)(-2x+7)$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	17	$\nearrow$	$+\infty$