# Correction contrôle de mathématiques
## Du mercredi 01 février 2017

## EXERCICE 1

**Monotonie d'une suite** **(2 points)**

1) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)+1}{n+1+3} - \dfrac{2n+1}{n+3} = \dfrac{(2n+3)(n+3)-(2n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$

$$= \frac{2n^2+6n+3n+9-2n^2-8n-n-4}{(n+4)(n+3)} = \frac{5}{(n+4)(n+3)}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n+4>0$ et $n+3>0 \ \Rightarrow\ u_{n+1}-u_n>0$

La suite $(u_n)$ est donc croissante.

## EXERCICE 2

**Suite arithmétique et suite géométrique** **(5 points)**

1) a) $u_{20} = u_{10} + 10r \ \Leftrightarrow\ r = \dfrac{u_{20}-u_{10}}{10} = \dfrac{-32+12}{10} = -2$

$u_{10} = u_0 + 10r \ \Leftrightarrow\ u_0 = u_{10} - 10r = -12 + 20 = 8$

b) Calculer $u_{100} = u_0 + 100r = 8 - 100 \times 2 = -192$

2) $S$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 3 de premier terme 9.

Nombre de termes : $\dfrac{126-9}{3} + 1 = 39 + 1 = 40.$

$S = 40 \times \dfrac{9+126}{2} = 2\,700$

3) a) $v_8 = v_5 \times q^3 \ \Leftrightarrow\ q^3 = \dfrac{3\,645}{135} = 27 = 3^3 \ \Leftrightarrow\ q = 3.$

$v_5 = v_0 \times q^5 \ \Leftrightarrow\ v_0 = \dfrac{v_5}{q^5} = \dfrac{135}{243} = \dfrac{5}{9}$

b) $S_8$ est la somme des 9 premiers termes de la suite géométrique $(v_n)$.

$$S_8 = v_0 \times \frac{1-q^9}{1-q} = \frac{5}{9} \times \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{5}{18}\left(3^9-1\right) = \frac{49\,205}{9}$$

## EXERCICE 3

**Limite d'une suite** **(5 points)**

1) a) $u_1 = \dfrac{1}{4}u_0 + 3 = \dfrac{3}{4} + 3 = \dfrac{3+12}{4} = \dfrac{15}{4}$

$u_2 = \dfrac{1}{4}u_1 + 3 = \dfrac{15}{16} + 3 = \dfrac{15+48}{16} = \dfrac{63}{16}$

$u_3 = \dfrac{1}{4}u_2 + 3 = \dfrac{63}{64} + 3 = \dfrac{63+192}{64} = \dfrac{255}{64}$

b) $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{15}{4}}{3} = \dfrac{15}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{4}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{63}{16}}{\frac{15}{4}} = \dfrac{63}{16} \times \dfrac{4}{15} = \dfrac{21}{20}$

$\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \dfrac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \dfrac{1}{4}u_n - 1 = \dfrac{1}{4}(u_n - 4) = \dfrac{1}{4}v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{4}$, la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -1$.

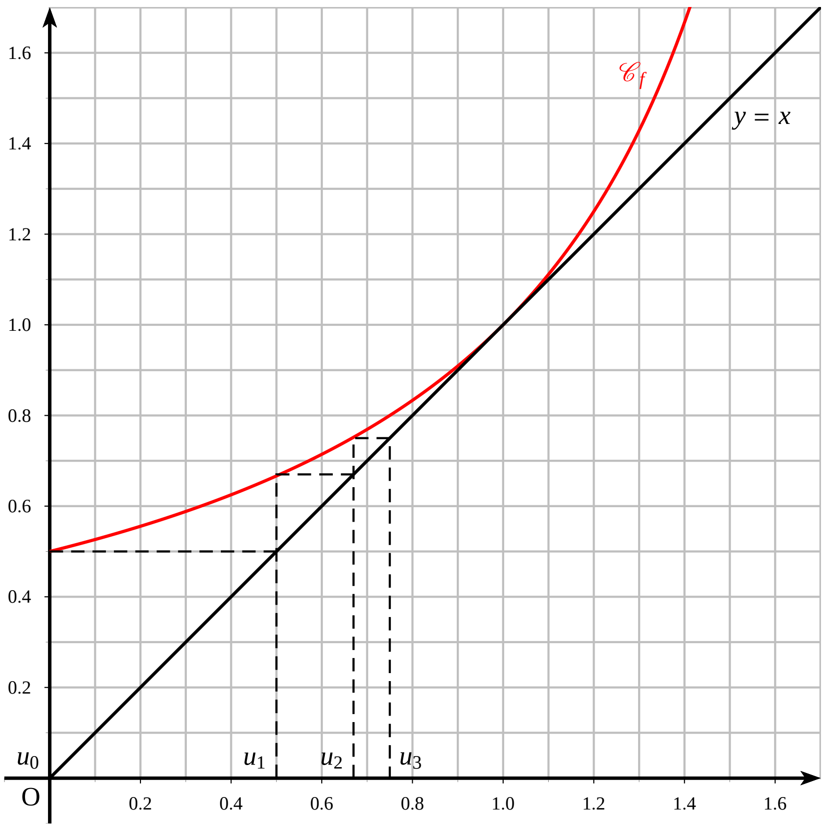
b) $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ d'où $u_n = v_n + 4 = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 4$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$. Par somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

## Exercice 4

**Visualisation d'une suite** **(3 points)**

1) a) On obtient le graphe suivant :




b) La droite d'équation $y = x$ sert à reporter les termes $u_n$ sur l'axe des abscisses.

c) On peut conjecturer que la suite $(u_n)$ est croissante et converge vers 1.

2) On trouve $N = 1\,000$

**Variables** : $N$ : entiers et $U$ réel
**Entrées et initialisation**
$0 \to N$
$0 \to U$
**Traitement**
**tant que** $|U-1| \geqslant 10^{-3}$ **faire**
$N+1 \to N$
$\dfrac{1}{2-U} \to U$
**fin**
**Sorties** : Afficher N

## Exercice 5

**Segments** **(5 points)**

1) $p_3 = 3$, $p_4 = 6$ et $p_5 = 6+4 = 10$.

2) Si on ajoute un point, on peut alors tracer $n$ nouveaux segments entre ce point et les $n$ points déjà placés.
On obtient alors $p_{n+1} = p_n + n$.

3) En écrivant les lignes :

$$\begin{aligned} \cancel{p_2} &= 1 \\ \cancel{p_3} &= \cancel{p_2} + 2 \\ \cancel{p_4} &= \cancel{p_3} + 3 \\ \cancel{\ldots} &= \cancel{\ldots} + \ldots \\ p_n &= \cancel{p_{n-1}} + n - 1 \end{aligned}$$

En additionnant termes à termes, on trouve : (somme télescopique)

$$p_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4) On voudrait connaître le nombre de points nécessaires pour tracer 1 035 segments. Pour cela, on écrit l'algorithme suivant :

**Variables** : $N$, $P$ : entiers
**Entrées et initialisation**
$1 \to P$
$2 \to N$
**Traitement**
**tant que** $P < 1\,035$ **faire**
$P + N \to P$
$N + 1 \to N$
**fin**
**Sorties** : Afficher $N$

**ou**

**Variables** : $N$, $P$ : entiers
**Entrées et initialisation**
$1 \to P$
$2 \to N$
**Traitement**
**tant que** $P \leqslant 1\,035$ **faire**
$P + N \to P$
$N + 1 \to N$
**fin**
**Sorties** : Afficher $N - 1$

On trouve $N = 46$