Correction du devoir de mathématiques

Du mardi 18 avril 2017

EXERCICE 1

Figure **(3 points)**

On remarquera que A et J se projettent orthogonalement sur [BC] respectivement en O et B et comme AJIB est un parallélogramme $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ}$

1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} = BC \times \dfrac{1}{2} BC = 8$

2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 = 16$

3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OB} = -BC \times \dfrac{1}{2} BC = -8$

4) $$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA} &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JA}) = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{JA}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JA} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} = 8 + 8 = 16\end{aligned}$$

5) $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OB} = -\dfrac{1}{2} BC \times \dfrac{1}{2} BC = -4$

6) $$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI}) = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OB} = -BC^2 - BC \times \dfrac{1}{2} BC = -16 - 8 = -24\end{aligned}$$

EXERCICE 2

Angle **(3 points)**

ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5. Le point E est le milieu de [AB].

1) Dans les triangles ABC et ADE rectangles en A, d'après le théorème de Pythagore :

- $BC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \Leftrightarrow BC = \sqrt{34}$
- $DE^2 = AE^2 + AD^2 = \dfrac{5}{2}^2 + 3^2 = \dfrac{61}{4} \Leftrightarrow DE = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

2) Dans le repère $(A\,;\, \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\,;\, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD})$, on a : $C(5\,;3)$, $D(0\,;3)$, $E\left(\frac{5}{2}\,;\,0\right)$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} - 9 = \frac{7}{2} \quad (1)$$

3) Or $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = AC \times DE \times \cos\theta = \dfrac{\sqrt{34} \times \sqrt{61}}{2} \times \cos\theta$ (2).

De (1) et (2), on a : $\cos\theta = \dfrac{\dfrac{7}{2}}{\dfrac{\sqrt{34} \times \sqrt{61}}{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{34}\sqrt{61}}$

On obtient alors : $\theta = \arccos\left(\dfrac{7}{\sqrt{34}\sqrt{61}}\right) \approx 81,16^\circ$.

EXERCICE 3

Orthocentre **(3 points)**

1) Pour tout point M du plan, on introduit le point A grâce à la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AM}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})}_{\vec{0}}+\overrightarrow{CA}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB})}_{\vec{0}}=0 \end{aligned}$$

2) Soit H l'intersection des hauteurs issues respectivement de A et B, on a alors : $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, or d'après la relation précédente, vraie pour tout M et donc pour H, on a :
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$

H est alors sur la hauteur issue de C. Les trois hauteurs sont donc concourantes en H.

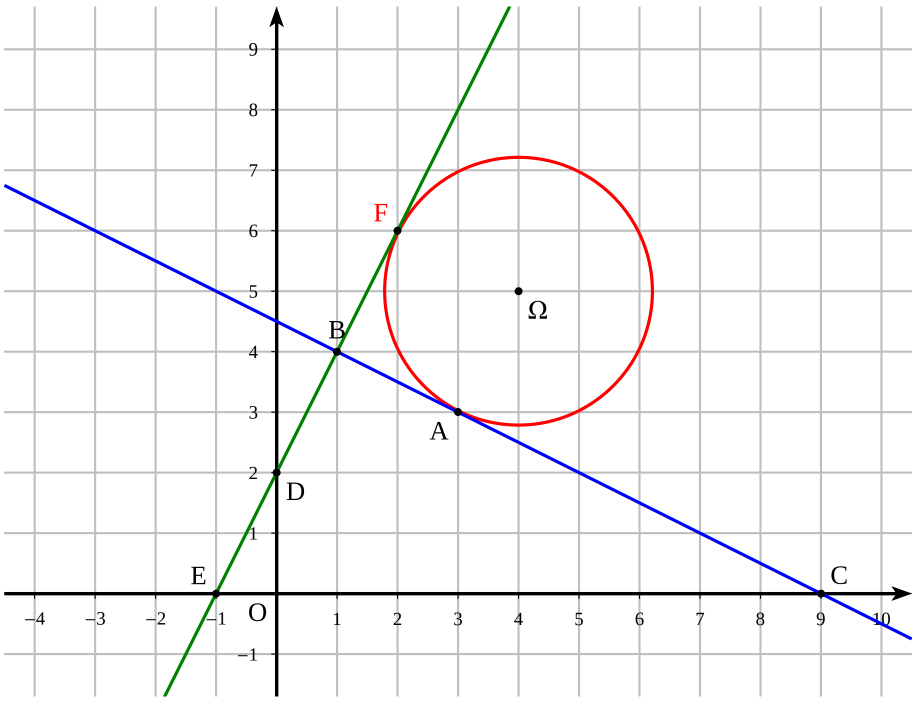
EXERCICE 4

Droite et cercle **(5 points)**

1) a) $x^2+y^2-8x-10y+36=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-8x+y^2-10y+36=0 \;\Leftrightarrow$
$(x-4)^2-16+(y-5)^2-25+36=0 \;\Leftrightarrow\; (x-4)^2-16+(y-5)^2=5$
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(4\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{5}$

b) On remplace les coordonnées de A dans l'équation du cercle $\mathscr{C}$:
$(x-4)^2+(y-5)^2=(3-4)^2+(5-3)^2=1+4=5.$
Le point A est donc sur le cercle.

c) On obtient la figure suivante : On prend pour la droite d_1 les points B(1 ; 4), C(9 ; 0), pour le droite d_2, les points D(0 ; 2) et E(−1 ; 0).



2) a) Le point A appartient à d_1 car $x + 2y - 9 = 3 + 6 - 9 = 0$.

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 3-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -6 + (-2)(-3) = 0$$

$\overrightarrow{\Omega A} \perp \overrightarrow{AC}$, donc la droite d_1 est tangente au cercle $\mathscr{C}$

b) L'équation réduite de la droite d_2 est $y = 2x + 2$, en remplaçant dans l'équation du cercle $\mathscr{C}$.

$$(x-4)^2 - 16 + (y-5)^2 = 5 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (2x+2-5)^2 = 5 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (2x-3)^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 12x + 9 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 20 = 0 \overset{\div 5}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

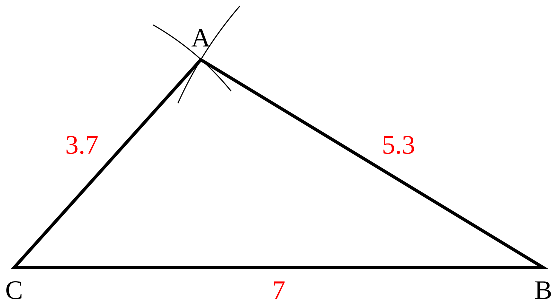
$$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

On obtient un seul point d'intersection entre d_2 et $\mathscr{C}$, le point F(2 ; 6). Le cercle $\mathscr{C}$ et d_2 sont donc tangents en F.

EXERCICE 5

Relation d'Al-Kashi **(3 points)**

1) On obtient la figure suivante :



2) D'après la relation d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC} \Leftrightarrow$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3,7^2 + 5,3^2 - 7^2}{2 \times 5,3 \times 3,7} = -\frac{361}{1261} \approx -0,184.$$

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{361}{1261}\right) \approx 100,6^\circ.$$

3) Par une permutation circulaire,

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5,3^2 + 7^2 - 3,7^2}{2 \times 5,3 \times 7} = \frac{317}{371} \approx 0,854.$$

$$\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{317}{371}\right) \approx 31,3^\circ.$$

EXERCICE 6

Position par double visées **(3 points)**

1) a) $\widehat{BCM} = 180 - \widehat{PCB} = 180 - 45 = 135^\circ$.

$\widehat{MBC} = 180 - \widehat{BCM} - \widehat{CMB} = 180 - 135 - 25 = 20^\circ$.

b) $\dfrac{\sin\widehat{CMB}}{BC} = \dfrac{\sin\widehat{MBC}}{MC} \quad\Leftrightarrow\quad BC = \dfrac{MC\sin\widehat{CMB}}{\sin\widehat{MBC}} = \dfrac{3,5\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 4,3 \text{ km}$

2) D'après la relation d'Al-Kashi :

$BP^2 = PC^2 + BC^2 - 2PC\times BC\times\cos\widehat{PCB} = 5^2 + 4,3^2 - 2\times 5\times 4,3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 13,084 \quad\Leftrightarrow$
$BP \approx \sqrt{13,084} \approx 3,6 \text{ km}$